Гарчиг

Бүлэг 1

Бодлого бодох стратегиуд

Дийлэнхи математикийн бодлогыг бодоход мэдлэг туршлага хоёр хүчтэй зэвсэг болж байдаг. Энэ хоёрыг олж авахад цаг хугацаа болон бэлтгэл, хичээл зүтгэл хэрэгтэй. Гэвч бас нэг хүчтэй зэвсэг байдаг нь бодлого бодох стратегиуд юм. Энэ нь өгөгдөл болон зорилгын утга санааг ойлгох, онцгой тохиолдлуудыг авч үзэх, шийдэх, бодлогоноос гарах зарим үр дүнг авч үзэн үүнийг түрүүлж батлах гэж оролдох эсвэл бодлогыг хувиргаж, төстэй бодлогыг бодох гэх мэт олон янз байдаг. Эхлээд дараах бодлогыг авч үзье.

Бодлого 1. (Хот Хооронд, 2017 он намар) ABC гурвалжин өгөв. AB талыг шүргэх гадаад багтсан тойргийн төв I. AC ба BC талуудыг шүргэх гадаад багтсан тойрог уг талуудыг харгалзан B_1 ба A_1 цэгт шүргэнэ. AA_1 ба BB_1 хэрчмүүд N цэгт огтлолцох ба IC хэрчмийн дундаж цэг M бол A, M, N ба B_1 цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

Бодлогыг ойлгох. Энэ ямар төрлийн бодлого вэ? Бодлогын дараах гурван төрөл байдаг:

1. "...ол" эсвэл "...тооцоол" гэсэн асуулт бүхий бодлого
2. "...болохыг харуул" эсвэл "...гэж батал" гэсэн асуулт бүхий бодлого

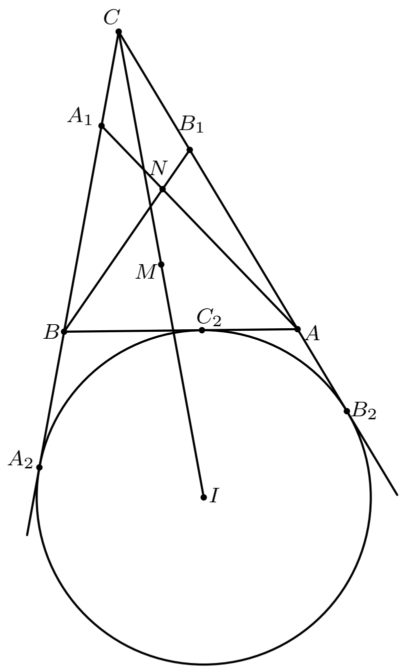
3. Ямар нэгэн өгүүлбэрийн үнэн худал эсэхийг тогтоох бодлого. Жишээ нь, "...байх ...олдох уу" "...байх албатай юу" гэх мэт.

Ихэвчлэн 3-р төрлийн бодлого нөгөө хоёроосоо илүү хүндэвтэр байдаг, учир нь энэ төрлийн бодлого дээр үнэн худал хоёрын аль нэгийг нь зөв гэж таамаглаад, дараа нь батлах шаардлагатай болдог. Тэгэхээр таамагласны дараа 2-р төрлийн бодлоготой үлдэнэ, гэвч бидний таамаглал буруу байж болно. Харин 1 ба 2-р төрлийн бодлогуудад бидний юу хийх ёстой нь тодорхой байдаг. Энэ тохиолдолд, манай бодлого нь 2-р төрлийн бодлого байна. Тэгэхээр бид ямар нэг аргаар батлах өгүүлбэрийг зөв логик холбоос бүхий үр дүнгүүдийн дараалаар гаргаж авах ёстой.

Өгөгдлийг ойлгох. Бидэнд юу өгөгдсөн вэ? Бүх өгөгдөл бодлогын өгүүлбэрт бий. Үүн дээр нэмээд тухайн хүний мэдлэг, туршлаганаас хамаарах мэддэг, чухал үр дүнгүүд орно. Энэ бодлого ерөнхийдөө дараах өгөгдлүүдтэй: Гурвалжин, түүний нэг гадаад багтсан тойргийн төв, нөгөө хоёр гадаад багтсан тойргийн талыг шүргэх цэг болон уг төвийг эсрэг оройтой нь холбосон хэрчмийн дундаж цэг ба "хачин"хоёр хэрчмийн (AA_1 ба BB_1) огтлолцлын цэг. Гадаад багтсан тойрог ба шүргэлтийн цэгүүд нь бодлогыг бага зэрэг төвөгтэй болгох боловч хачин хоёр хэрчмийн огтлолцлын цэг нь гол хүндрэл болж байна.

Зорилгыг ойлгох. Бид юуг харуулахыг зорьж байна вэ? Энэ бодлогоны хувьд, бид 4 цэгийг нэг тойрог дээр оршихыг батлах ёстой. Үүнийг маш олон аргаар харуулж болдог: Өнцөг хөөх, огтлогч шүргэгчийн теорем, огтлолцсон хөвчүүдийн теоремийг ашиглах зэрэг. Энэ бодлогоны хувьд эдгээрийг алийг ч ашиглаж магадгүй.

Тэмдэглэгээ хийх болон зураг зурах. Геометрийн бодлогын хувьд зураг зурах нь бодлогыг биетээр мэдрэхэд тусалж, таамаглалуудыг шалгах гэх мэт шалтгаантай (жишээ нь, энэ бодлого дээр C, N, I цэгүүдийг нэг шулуун дээр оршино гэж таамаглаж болно.)



Хоёр дахь шалтгааныг эс тооцвол, зураг зурах нь бодолтонд нөлөө бараг л үзүүлэхгүй. Харин бид зарим ашиглагдаж магадгүй цэгүүдийг тэмдэглэж, эсвэл нэмэлт байгуулалт хийж болно. Манай бодлогоны хувьд гадаад багтсан тойрог ба шүргэлтийн цэгүүд оролцсон учир бусад шүргэлтийн цэгүүд болон тойргийн төвүүдийг тэмдэглэж, түүнийгээ ашиглах боломжтой. Эдгээр цэгүүдээс, C оройд харгалзах гадаад багтсан тойргийн (төв нь I) AC ба BC шулуунуудыг шүргэх цэгүүдийг сонгож авч, харгалзан B_2 ба A_2 гэе. Энэ цэгүүд яагаад онцгой байгаа вэ? гэвэл,

$IB_2 \perp AC$ ба $IA_2 \perp BC$ учир $\triangle CB_2I$ ба CI_2A нь тэгш өнцөгт гурвалжингууд болох ба эдгээрийн гипотенузын дундаж цэгийг өгсөн (M), мөн тэгш өнцөгт гурвалжны гипотенузийн дундаж цэгтэй холбоотой маш хэрэгтэй чанар нь уг цэгээс гурван орой хүртэлх зайнууд тэнцүү, ө.х, $MC = MI = MA_2 = MB_2$ байна. Мөн C, B_1, A, B_2 ба C, A_1, B, A_2 цэгүүд нэг шулуун дээр оршиж байна. Бид мөн I төвтэй гадаад багтсан тойргийн AB-г шүргэх цэгийг C_2 гэж тэмдэглэж болно, гэвч энд $IC_2 \perp AB$-аас өөр чанар харагдахгүй байна. Гэвч $AB_2 = AC_2$ ба $BC_2 = BA_2$ байдаг учир энэ цэгийг "хаяж"болохгүй. Эцэст нь, стандарт тэмдэглэгээг даган, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ ба $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ гэе.

Ажиглалт хийх, ашиглаж магадгүй зүйлсийг тэмдэглэж авах. Бид өмнө нь бодлогын зорилгыг өнцөг хөөх эсвэл огтлогч шүргэгчийн теорем, огтлогдсон хөвчийн теорем ашиглан харуулж магадгүй гэсэн билээ. Одоо хэрэглэгдэж магадгүй бүх зүйлсийг бичье.

1. I цэг $\angle A_2BA$, $\angle B_2AB$ ба A_2CB_2-ийн дотоод биссектриссүүд дээр оршино.
2. Тойргийн гаднах цэгээс тойрогт татсан хоёр шүргэгчийн урт тэнцүү, иймд $BA_2 = BC_2$,$AB_2 = AC_2$ ба $CA_2 = CB_2$
3. Өмнө нь баталсан $MC = MI = MA_2 = MB_2$ чанар
4. $\angle IA_2C = \angle IB_2C = 90^\circ$ гэх мэт.

Одоохондоо дээрх 4 чанарыг ашиглъя. (2)-оос,

$$CA_2 + CB_2 = CA + AB_2 + CB + BA_2 = a + b + AC_2 + BC_2 = a + b + c$$

гэж гарах ба $CA_2 = CB_2$ ба $2s = a + b + c$ учраас $s = CA_2 = CB_2$. Тэгэхээр

$$BA_2 = BC_2 = CA_2 - BC = s - a$$

ба

$$AB_2 = AC_2 = CB_2 - AC = s - b$$

гэж гарна. Адилхан аргаар, бид

$$CA_1 = s - b,\ BA_1 = s - c = AB_1,\ CB_1 = s - a$$

болохыг баталж болно (үлдсэн хоёр гадаад багтсан тойргийн шүргэх цэгүүдийг авч үзнэ). Тэгэхлээр,

$$BA_2 = s - a = CB_1,\ AB_2 = s - b = CA_1 \text{ ба } BA_1 = AB_1$$

болохыг баталлаа, энэ нь анх тийм ч илэрхий байгаагүй билээ.

Бодлогыг бага зэрэг өөрчлөх. Энэ алхмаар дараах үйлдлүүдийг хийж үздэг:

$a)$ Онцгой тохиолдлуудыг авч үзэх

$b)$ Бодлогын хялбар хувилбарыг бодох

$c)$ Олох зүйлийг өөрөөсөө мөрдлөг байдлаар гаргах үр дүнг таамаглаж, батлах гэж оролдох

$d)$ Бодлогоноос гарах мөрдлөгөөнүүдийг эхэлж батлах гэж оролдох

$e)$ Төстэй бодлогуудыг харьцуулах

$f)$ Бодлогыг өргөтгөх

Манай бодлогын хувьд, бодлогын хялбар хувилбарыг батлах гэж оролдож үзэж болно, жишээлбэл, $\triangle ABC$ адил хажуут буюу $CA = CB$ тохиолдлыг авч үзье. Энэ тохиолдолд (A, B), (A_1, B_1), (A_2, B_2) цэгүүд IC шулууны хувьд тэгш хэмтэй болох ба иймд C, N, I цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Тэгэхээр A, M, N ба B_1 цэгүүдийг нэг тойрог дээр оршино гэдгийг огтлогч, шүргэгчийн теорем ёсоор $CA \cdot CB_1 = CM \cdot CN$ гэж батласнаар харуулах боломжтой боллоо . Үүнийг зай олох нүсэр томъёонуудын тусламжтайгаар батлах боломжтой. Тэгэхээр ямар ч байсан адил хажуут үед бодож чадах юм байна, гэхдээ ерөнхий тохиолдолд C, N, M цэгүүд нэг шулуун дээр орших албагүй (зураг үзэхэд, $\triangle ABC$ адил хажуут биш бол эдгээр цэгүүд нэг шулуун дээр орших албагүй болохыг харж болно) учраас энэ зай тооцох арга зам нь ерөнхий тохиолдолд хэрэглэгдэхгүй байх магадлалтай. Иймд үүнийг түр орхиод одоо бодлогоноос гарах үр дүн, мөрдлөгөөнүүдийг авч үзье. Бид A, M, N, B_1 цэгүүд нэг тойрог оршино гэдгийг үнэн гэж үзье. Тэгвэл, бодлого дах A, B цэгүүд тэгш эрхтэй оролцсон учир B, M, N, A_1 цэгүүд ч бас нэг тойрог дээр оршино (A, M, N, B_1 цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэдгийн баталгаанд (A, B), (A_1, B_1), (A_2, B_2) цэгүүдийн байрыг солиход гарна). Одоо, хоёр ширхэг багтсан дөрвөн өнцөгтүүдтэй болсон учир өнцөг хөөе. Тэгвэл

$$\angle A_1BM = 180^\circ - \angle A_1NM = \angle MNA = \angle MB_1A = 180^\circ - \angle CB_1M,$$

өөрөөр хэлбэл, $\angle CBM + \angle CB_1M = 180^\circ$ болно! Тэгэхээр C, B_1, M, B цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Адилхнаар C, A_1, M, A цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Хэрэв бид энэ хоёр үр дүнг баталчихвал эндээс A, M, N, B_1 цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батлагдах уу? Хэрэв тийм бол, анхны бодлогын оронд энэ бодлогыг бодоход хангалттай болно. Хамгийн гол нь, бид "хачин"хоёр хэрчмийн огтлолцлын цэг N-ээс салж чадах юм. Үнэхээр, хэрэв C, A, M, A_1 ба C, B, M, B_1 цэгүүд нэг тойрог дээр оршдог бол эндээс

$$\angle NB_1M = \angle BB_1M = \angle BCM = \angle A_1CM = \angle A_1AM = \angle NAM$$

гэж гарах тул A, M, N ба B_1 нэг тойрог дээр оршино. Тэгэхээр бид дараах бодлоготой үлдлээ.

C, B_1, M, B ба C, A_1, M, A цэгүүдийг нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

Бид сая юу хийсэн бэ гэвэл бид өгсөн бодлогоо үнэн гэдгийг ашиглан өөр үр дүн биелэхийг олж тогтоогоод, тэр үр дүн нь өгсөн бодлоготой эквивалент байж таарсан (заавал эквивалент байх албагүй) учраас бодлогоо өөр бодлогоор сольж чадсан юм. Одоо дээрх шинэ бодлогоо бодоцгооё. Бид $A_2B = CB_1$, $BA_1 = B_1A$ ба $A_1C = AB_2$ гэдэгт анхаарлаа хандуулъя. Энэ нь, A_2C ба CB_2 тэнцүү хэрчмүүд дээр харгалзах зайнууд нь тэнцүү байхаар харгалзан B, A_1 ба B_1, A цэгүүдийг авсан мэт сэтгэгдэл төрүүлж байна. Тэгэхлээр, A_2-г C-д, Cг B_2-д буулгадаг хөдөлгөөний хувьд B нь B_1 рүү, A_1 нь A руу бууна. Гэхдээ ямар хөдөлгөөн A_2-г C-д, C-г B_2-д буулгах билээ? Зургаа харвал, $MA_2 = MC = MB_2$ нь M төвтэй эргүүлэлтийг санал болгоно. Гэвч бидний хайж буй хөдөлгөөн M төвтэй эргүүлэлт байхын тулд $\angle A_2MC = \angle B_2MC$ байх ёстой. Тэгэхээр үүнийг харуулахыг зорьё. Өнцөг хөөвөл,

$$\angle A_2CI = \angle B_2CI = \frac{\gamma}{2}$$

тул,

$$MC = MI = MA_2 = MB_2$$

учраас

$$\angle MA_2C = \angle MB_2C = \frac{\gamma}{2}$$

юм. Эндээс

$$\angle A_2MC = 180^\circ - \angle MCA_2 - \angle MA_2C = 180^\circ - \gamma$$

ба $\angle B_2MC = 180^\circ - \gamma$ гэж гарна. Иймд $\angle A_2MC = \angle B_2MC$ учраас M төвтэй, $180^\circ - \gamma$ өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлтээр A_2 нь C рүү, C нь B_2 руу бууна гэж гарч, бид хайж буй хөдөлгөөнөө оллоо. Тэгэхээр энэ эргүүлэлтээр B нь B_1 рүү, A_1 нь A руу буух ба эндээс $MB = MB_1$, $MA_1 = MA$ бөгөөд $\angle BMB_1 = \angle A_1MA = 180^\circ - \gamma$ гэж гарна. $\angle C = \gamma$ болохыг тооцвол,$\angle BCB_1 + \angle BMB_1 = 180^\circ$ ба $\angle A_1CA + \angle A_1MA = 180^\circ$ гэдгээс B, M, B_1, C ба A, M, A_1, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж гарна. Ийнхүү бодлого бодогдлоо.

Дээрх бодолт нь дэлгэрэнгүй бодолт бөгөөд одоо олимпиадад бичихэд тохирох, тайлбар бүхий хэсгүүдийг хассан бодолтыг бичье.

Бодолт ▷ $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ ба $\angle ACB = \gamma$ гэе. C оройд харгалзах гадаад багтсан тойрог BC ба AC шулуунуудыг харгалзан A_2 ба B_2 цэгт шүргэнэ гэе. AB талыг C_2 цэгт шүргэж байг. $BA_2 = BC_2$ ба $AB_2 = AC_2$, $CA_2 = CB_2$ тул

$$CA_2 + CB_2 = BC + AC + BA_2 + AB_2 = a + b + BC_2 + AC_2 = 2s$$

буюу $CA_2 = CB_2 = s$ болно. Иймээс $BA_2 = BC_2 = CA_2 - BC = s - a$ ба $AB_2 = AC_2 = CB_2 - AC = s - b$ гэж гарна. Адилхан аргаар, $CA_1 = s - b$, $CB_1 = s - a$ ба $BA_1 = AB_1 = s - c$. Эдгээрээс $BA_2 = CB_1 = s - a$, $A_1C = AB_2 = s - b$ ба $BA_1 = AB_1$ болно. Мөн $\angle A_2CI = \angle B_2CI = \frac{\gamma}{2}$ ба $\angle CA_2I = \angle CB_2I = 90^\circ$

гэдгээс $MC = MI = MA_2 = MB_2$ гэж гарах ба иймээс $MCA_2 = MA_2C = \frac{\gamma}{2}$ ба $\angle MCB_2 = \angle MB_2C = \frac{\gamma}{2}$ болно. Тэгэхлээр $\angle A_2MC = \angle CMB_2 = 180° - \gamma$, бас $MA_2 = MC = MB_2$ учраас M төвтэй, $180° - \gamma$-ийн эргүүлэлтийг R гэж тэмдэглэвэл $R(A_2) = C$, $R(C) = B_2$ болно. Иймээс $R(A_2C) = R(C_2B)$. Мөн B, $A_1 \in A_2C$, B_1, $A \in CB_1$ хувьд $A_2B = CB_1$, $BA_1 = B_1A$, $A_1C = AB_2$ учраас $R(B) = B_1$ ба $R(A_1) = A$ болно. Иймд $\angle BMB_1 = \angle A_1MA = 180° - \gamma$. $\angle C = \gamma$ тул $\angle BCB_1 + \angle BMB_1 = \angle A_1CA + \angle A_1MA = 180°$ гэдгээс B, M, B_1, C ба A, M, A_1, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж гарна. Үүнийг ашиглавал

$$\angle MAN = \angle MAA_1 = \angle MCA_1 = \angle MCB = \angle MB_1B = \angle MB_1N$$

болох тул A, M, N ба B_1 цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. $\square$

Бүлэг 2

Геометр

§2.1 Евклидын геометр

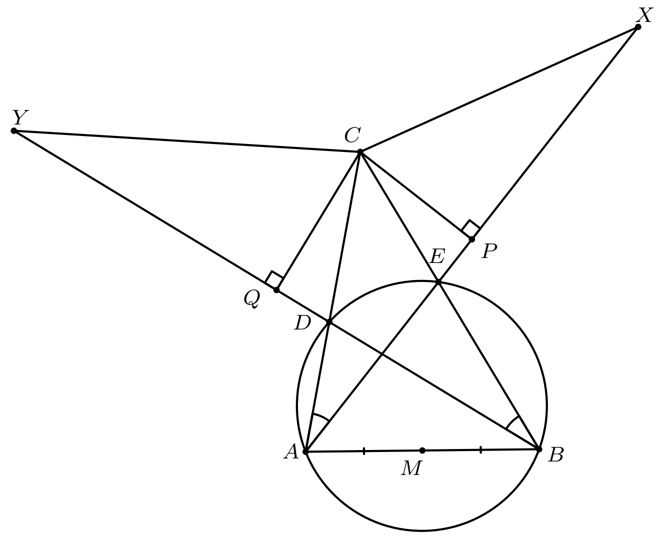
Евклидын геометр бол өнөөгийнх шигээ загвартай болсон (аксиомтай, теоремтой ба таамаглал, постулаттай) эхний математикийн салбар бөгөөд илэрхий өгүүлбэрүүд болон энгийн логик зарчмуудаас илэрхий биш хүнд хэцүү чанаруудыг гаргаж авдаг математикийн "ид шид"- ийн маш эмх цэгцтэй хэсэг нь юм. Геометрийн бодлого нь мөн биетээр мэдрэхэд дөхөм байдаг. Жишээ болгож дараах бодлогыг бодолтын хамт авч үзье.

Жишээ 1. ABC гурвалжны A, B оройнуудыг дайрсан тойрог гурвалжны AC, BC талуудыг харгалзан D, E цэгүүдэд огтолно. Гурвалжны AB талын дундаж цэг M бөгөөд C оройгоос AE, BD шулуунуудад буулгасан перпендикулярын сууриуд P, Q бол $MP = MQ$ гэж батал.

Бодолт ▷ AE, BQ шулуунууд дээр харгалзан X, Y цэгүүдийг

$$AP = PX,\ BQ = QY$$

байхаар авъя.



P нь AX-ийн дундаж ба $CP \perp AX$ тул $AC = XC$, учир нь C нь AX-н дунджийг дайрсан түүнд перпендикуляр шулуун дээр оршино. Адилхнаар, $YC = BC$ болно. Иймээс, $\angle CAX = \angle CXA$ ба $\angle CYB = \angle CBY$ болно.

A, B, E, D цэгүүд нэг тойрог дээр оршино, иймээс

$$\angle CAX = \angle DAE = \angle DBE = \angle CBY.$$

Мөн $\triangle ACX$, $\triangle BCY$ нь адил хажуут учраас

$$\angle ACX = 180^\circ - 2\angle CAX = 180^\circ - 2\angle CBY = \angle BCY,$$

тэгэхээр $\angle ACY = \angle BCX$. $\triangle ACY$ ба $\triangle XCB$-ийн хувьд

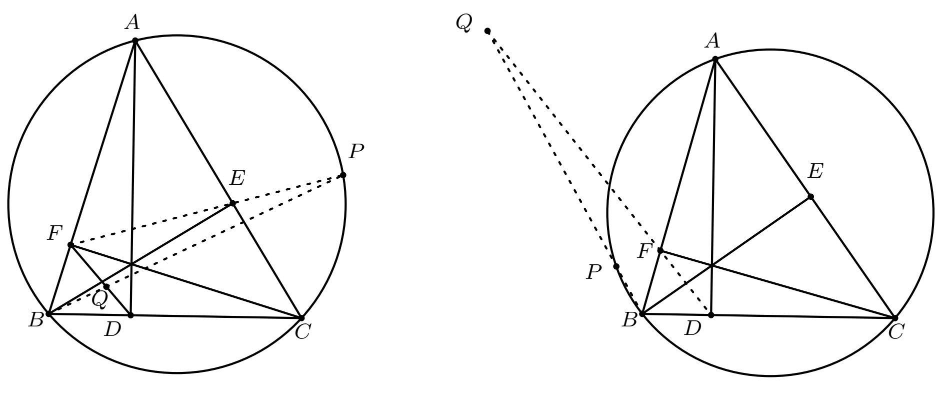
$$XC = AC,\ BC = YC$$

ба $\angle XCB = \angle ACY$ тул ТӨТ шинжээр $\triangle ACY = \triangle XCB$, иймээс $AY = BX$. Эцэст нь, AB-ийн дундаж M ба BY-ийн дундаж Q тул MQ нь $\triangle ABY$-ийн дундаж шугам болно, иймд $MQ = \frac{AY}{2}$. Адилхнаар $MP = \frac{BX}{2}$ ба $AY = BX$ учраас $MP = MQ$ болж батлагдлаа. $\square$

Бүх геометрийн бодлогын бодолт дээрх бодолт шиг хэт илэрхий өгүүлбэрүүд болон зөв логик холбоосуудаар илэрхий биш чанаруудыг гаргаж авсан байдаг ба бодолт аль болох уран гоё байвал сайн. Дээрх жишээний хувьд координатын систем авч тойрийн тэгшитгэл болон зайн томъёонуудаар бодож байснаас дээрх ухаалаг бөгөөд авсаархан бодолт хийсэн нь хавьгүй дээр шүү дээ. Одоо бодлого бодох стратегиудийг геометрийн бодлогууд дээр авч үзье.

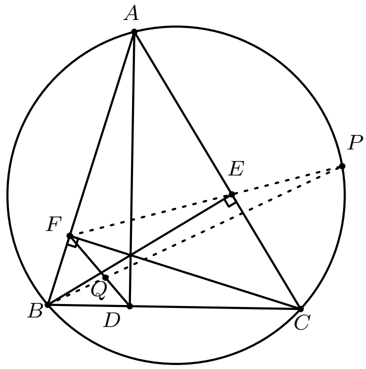
Бодлого 2. (IMO Shortlist 2010) Хурц өнцөгт ABC гурвалжны өндрийн сууриуд D, E, F нь харгалзан BC, CA, AB талууд дээр оршино. Багтаасан тойрог болон EF шулууны огтлолцлын хоёр цэгийн нэг нь P. BP ба DF шулуунууд Q цэгт огтлолцоно. $AP = AQ$ гэж харуул.

Бодолт ▷ Бид мэдээж хамгийн эхэнд зургаа зурья. Гэхдээ EF шулуун болон багтаасан тойргийн огтлолцлын хоёр цэгийн аль цэгээр P-г авахаас хамаарч хоёр өөр зураг зурагдах боломжтой болохыг анзаарья.



Эхний тохиолдолд P цэг FE цацраг дээр орших бол хоёр дах тохиолдолд P цэг EF цацраг дээр оршино. Хоёр дахь тохиолдолд Q цэг тойргийн гадна гарч, зураг "онцгүй"зурагдаж буй тул эхлээд эхний тохиолдлоо бодъё. Тэгээд хоёр дахь тохиолдол маань адилхан бодогдоно гэж найдья.

Тохиолдол 1. P цэг FE цацраг дээр оршино гэж үзье.



Одоо энэ тохиолдлоо хэрхэн бодох вэ? Бид $AP = AQ$ гэж батлах ёстой. Зургаа харвал бидэнд гурвалжинийг багтаасан тойрог, өндрийн сууриуд гэсэн өнцөг хөөхөд зохицсон өгөгдлүүд өгөгдсөн ажээ. Үнэхээр бид үндсэн $\triangle ABC$ гурвалжин болон D, E, F цэгүүд дээрх бараг бүх өнцгийг олж чадна. Харин P, Q цэгүүд хамаагүй нууцлаг цэгүүд аж. Тэгэхээр манай бодлогийн гол хүндрэл эдгээр хоёр цэгийн нууцийг тайлах болж байна. Бид олон өнцгүүдийн мэдээлэлтэй учраас $\angle APQ = \angle AQP$ гэж харуулъя, харин энэ арга зам бүтэлгүйтвэл AP, AQ уртыг тооцоолох хоёрдугаар арга зам ашиглаж болно. Эхлээд $\angle APQ = \angle APB$ буюу энэ нь AB нум дээр тулсан өнцөг болохыг анзаарвал бид батлах $\angle APQ = \angle AQP$ тэнцлээ $\angle ACB = \angle AQP$ гэж батлах болгож өөрчилж болно. Энэ нь үндсэн гурвалжин болох ABC-ийн өнцгүүдтэй холбогдож буй давуу талтай. Харин нөгөө өнцөг болох $\angle AQP$-ийг хэрхэн олох вэ? P цэг их эвгүй, хачин тодорхойлогдсон ба $Q = BP \cap DF$ нь бүр барьцгүй болгож байна. Бид энэ нөхцөл байдалд дараах хоёр замаар ажиллаж болно :

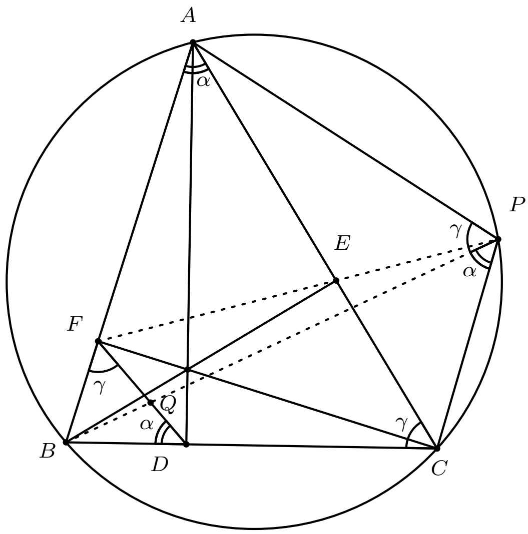
i) Өгсөн нөхцлөөсөө сонирхолтой чанар илрүүлэх

ii) Батлах өгүүлбрээ хялбар өөр зорилгоор солих, жишээ нь "ардаас нь явах"

"Ардаас нь явах" (бас "төгсгөлөөс нь хөөх" ч гэдэг) гэдэг нь батлах өгүүлбэрээ үнэн гэж үзэж байгаад (угаасаа батал гэж байгаа бол үнэн л байж таарна

- гэхдээ баталгаандаа батлах өгүүлбэрээ ашиглаж болохгүйг санах хэрэгтэй) тэндээсээ эквивалент үр дүнгүүд гаргаж, батлах өгүүлбэрээ уг үр дүнгүүдээр солидог логик үйл ажиллагаа юм. Энэ нь батлах өгүүлбэрээ өөр хялбар зорилгоор солих боломж олгодог. Бид зөвхөн i) замаар янз янзийн үр дүн олоод байвал бодлогоо бодоход тустай ч зүг чигээ олохгүй төөрөх магадлалтай бол ii) нь зорилго руу зүг чиг гаргана. Энэ бодлого дээр алийг нь ч хийж болох ч бид эхлээд өнцөг хөөсний дараа "ардаас нь явж"үзье.

Одоо зурган дээрээ хэрэг болж магадгүй өнцгүүдээ тэмдэглье. Стандарт тэмдэглэгээгээр $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ ба $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ гэе (Өөрөө зургаа зураад, дагаад өнцгүүдээ тэмдэглээд явбал тустай). Одоо бид үүгээрээ олон өнцгүүд илэрхийлж болно. Жишээлбэл, D, E, F өндрийн суурь болохыг санавал $BFEC$, $CDFA$, $AEDB$ багтсан дөрвөн өнцөгтүүд гэж гарна. Иймд $\angle BFD = \angle BCA = \gamma$, $\angle BDF = \angle BAC = \alpha$ гэж олдоно. Адилхан аргаар $\angle AFE$, $\angle AEF$, $\angle CDE$, $\angle CED$ өнцгүүдээ олж тэмдэглье (зарим огт хэрэггүй мэт өнцгүүдийг тэмдэглэх эсвэл ядаж санаж байх хэрэгтэй - санаанд оромгүй байдлаар хэрэг болж мэднэ). Ийнхүү бид D, E, F цэгүүд дээрх өнцгүүдийг оллоо, одоо P, Q цэгүүд дээрх өнцгүүд дээрээ ажиллая. Бид өмнө нь $\angle APQ$ -г $\angle ACB = \gamma$ -аар сольж байснаа санавал бид $\angle APQ = \gamma$, адилхнаар $\angle CPQ = \angle CAB = \alpha$ болохыг олж чадна.



Одоо бид P, Q цэгүүдтэйгээ холбоотой бага зэрэг мэдээлэлтэй болсон учраас зорилго дээрээ төвлөрч, бодлогоо төгсгөлөөс нь хөөж явж үзье.$AP = AQ$ буюу $\angle AQP = \gamma$ байг. Эндээс юу гэж хэлж болох вэ? Зургаа харвал өөр γ өнцөг $\angle BFD, \angle AFE$ дээр гарч ирж байна. Гэхдээ F, E, P цэгүүд нэг шулуун дээр оршино шүү дээ. Тэгэхээр $\angle AQP = \angle AFP$ буюу $AFQP$ тойрогт багтана гэж мөрдөнө. Өөрөөр хэлбэл, хэрэв батлах $\angle AQP = \gamma$ үнэн бол $AFQP$ тойрогт багтана. Нөгөө талаас, хэрэв $AFQP$ тойрогт багтах бол эндээс бодлого бодогдох уу? Мэдээж тэгнэ : $AFQP$ тойрогт багтана гэдгээс $\angle AQP = \angle AFP = \gamma$ гэж гарч бид зорилгодоо хүрэх юм. Тэгэхээр одоо

$AFQP$ тойрогт багтана гэж харуул

гэсэн шинэ зорилго тавья.

Хэдийгээр $AFQP$ тойрогт багтана гэдгийг өөр аргаар харуулж болох ч (жишээ нь $BF \cdot BA = BQ \cdot BP$ гэдгээс огтлогч шүргэгчийн теорем хэрэглэн гаргаж болно) бид эхлээд өнцөг хөөн батлахыг хичээе, учир бидэнд хамгийн ойр арга нь л өнцөг хөөх байгаа билээ. Тэгэхээр шинэ зорилго маань $\angle FPQ = \angle FAQ$, $\angle BQF = \angle BAP$ гэх мэт өнцгийн нөхцлүүдтэй эквивалент юм. Багтсан дөрвөн өнцөгтөд олон тэнцүү өнцгүүд гарч ирдэг ба бид $AFQP$ хувьд аль хялбарыг нь олж батлахыг хичээе. Зургаа сайн харвал бид аль хэдийн $\angle BFD = \angle APQ = \gamma$ болохыг тэмдэглэсэн байна, тэгэхээр $\angle APQ + \angle AFQ = 180°$ болох юм. Ийнхүү $AFQP$ тойрогт багтах нь батлагдаж бодлого бодогдлоо.

Дээрх бодлого анх харахад их нууцлаг мэт санагдах боловч зурган дээрээ өнцгөө сайн тэмдэглээд ганц энгийн ажиглалт хийж чадахад хялбар бодогддог ажээ. Мөн "ардаас нь явах"стратегийн ачаар бид гол ажиглалт болох $AFQP$ тойрогт багтана гэдгийг төөрөхгүйгээр олж чадлаа - хэдийгээр бодолт харсны дараа илэрхий мэт боловч уг ажиглалтыг мэдээгүй үед олж харахад хэцүү байж болно.

Тохиолдол 2. P цэг EF цацраг дээр оршдог байг. Бид эхний тохиолдлынхоо бодолтыг зөөж хийгээд үзье, өөрөөр хэлбэл

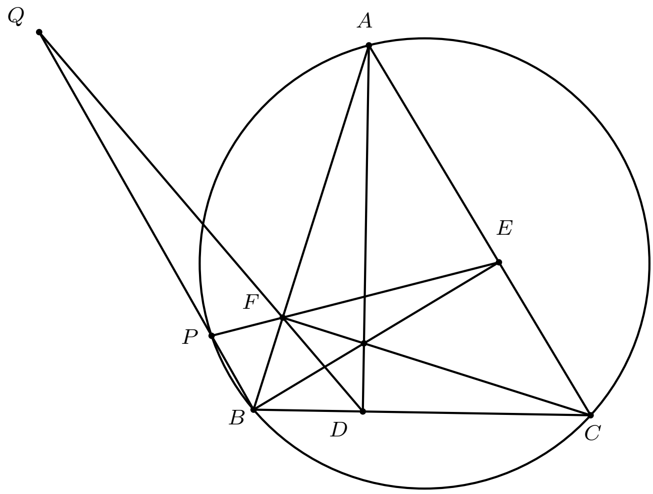
i) $\angle BFQ = \angle BPA$ гэж батлан $AFQP$ тойрогт багтана гэж харуулна.

ii) $AFQP$ багтсан дөрвөн өнцөгт ба $\angle AFP = \gamma$ гэдгээс $\angle AQP = \gamma$ болно.

iii) P цэг ACB-г багтаасан тойрог дээр оршино гэдгээс $\angle APQ = \gamma = \angle AQP$.

iv) Иймд $AP = AQ$ байна.

гэсэн дарааллаар бодъё.



Ихэнхи тохиолдолд цэгийн байрлалаас хамааран тохиолдолд баталгаа бараг өөрчлөгддөггүй, эхний тохиолдолд батлагдсан үр дүн бусад дээр нь бас батлагддаг. Бодлого өөрөө P цэгийн байрлалыг заагаагүй тул аль ч тохиолдол бодогдох ёстой, тэгэхээр бодолт маань ялгаагүй ажиллана гэдэгт бараг итгэлтэй байж болно.

i) Бид $\angle BFQ, \angle BPA$ өнцгүүдийг шууд тооцоолж чадна :

$$\angle BFD = \angle BCA = \gamma \text{ тул } \angle BFQ = 180^\circ - \gamma$$

болно. Бас

$$\angle BPA = 180^\circ - \angle BCA = 180^\circ - \gamma$$

байна. Тэгэхээр $\angle BFQ = \angle BPA$ тул $AFPQ$ тойрогт багтана.

ii) Одоо $\angle AFP$-г тооцоолвол энэ өнцөг γ гарахгүй ажээ :

$$\angle AFP = 180^\circ - \angle AFE = 180^\circ - \gamma$$

Бодоод үзвэл γ биш $180^\circ - \gamma$ гарах нь зөв юм, учир нь P, E цэгүүдийн хооронд F бий тул $\angle AFP$ нь AF шулууны нөгөө талд гарч байгаа билээ.

Гэхдээ энэ нь азаар $\angle AQP$-ийг өөрчлөхгүй : Q, F цэгүүд AP шулууны хоёр талд бий тул

$$\angle AQP = 180^\circ - \angle AFP = \gamma$$

болж байна.

iii) Шууд тооцоолвол $\angle APQ$ хувьд дээрх шиг өөрчлөгдөөд байхгүй аж :

$$\angle APQ = \angle ACB = \gamma$$

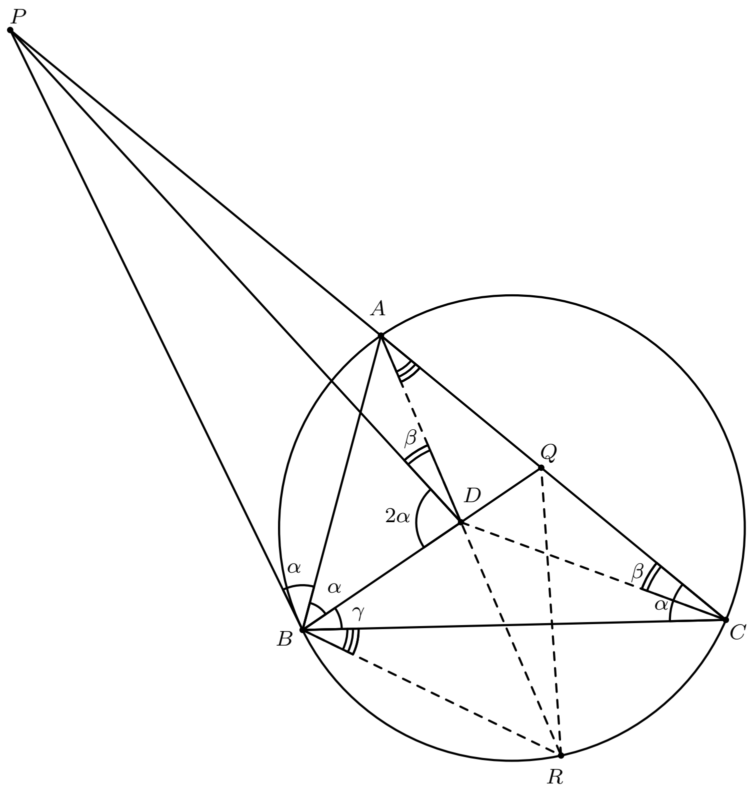
Тэгэхээр $\angle APQ = \angle AQP$.

iv) Эцэст нь $\angle APQ = \angle AQP$ гэдгээс $AP = AQ$ болж энэ тохиолдолд ч гэсэн бодлого бодогдлоо.

□

Бодлого 3. (IMO Shortlist 2013) ABC нь $\angle B > \angle C$ байх гурвалжин байг. P ба Q цэгүүдийг AC шулуун дээр $\angle PBA = \angle QBA = \angle ACB$ ба A нь P ба C-ийн хооронд оршдог ялгаатай цэгүүд байхаар авав. BQ хэрчим дотор $PD = PB$ байх D цэг олддог гэж үзье. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг AD цацраг $R \not\equiv A$ цэгээр огтолдог бол $QB = QR$ гэж батал.

Бодолт ▷ Эхлээд зургаа зуръя. Бидний зорилго нь $QB = QR$ гэж батлах бөгөөд бидэнд тойрог ба олон өнцөгтэй холбоотой өгөгдөл бий учир үүнийг $\angle QBR = \angle QRB$ гэж өөрчлөөд үүнийг батлах гэж оролдъё. Хэрэв энэ бүтэлгүйтвэл QB ба QR-ийн уртыг тооцоолоод тэнцүү гэж харуулахыг оролдох боломжтой болохыг санаж байя.



Зургаа харахад л тойрог, олон холбоотой өнцгүүд өгөгдсөн нь өнцөг хөөхийг санал болгож байна. Эхлээд зарим өнцгүүдийг тэмдэглэж авья. Олон давтагдан гарч ирэх, бусад өнцгүүдийг илэрхийлэхэд оролцох өнцүүдийг тэмдэглэж (α, β, γ, x гэх мэтээр өнцгүүдийг үсгээр тэмдэглэнэ) бусад өнцгүүдийг уг үсгүүдээсээ хамааруулж олоод үүнийгээ ашиглан дүгнэлт гаргах нь иймэрхүү төрлийн олон өнцөг хөөх боломжтой бодлогуудад довтлоход маш хэрэгтэй байдаг. Тэгэхээр, $\angle ACB = \angle PBA = \angle QBA = \alpha$ гэж тэмдэглэе. Мөн өнцөг хөөх зорилгоор $\angle QBC = \gamma$ гэе. Тэгвэл бид зарим өнцгүүдийг α, γ-аар илэрхийлж болно, жишээ нь $\triangle QBC$-ээс $\angle AQB = \alpha + \gamma$ болно.

Бид сонирхож буй $\angle QBR$ ба $\angle QRB$ өнцгүүдээ нэг ажиглавал аль аль нь их эвгүй өнцгүүд байна. Алийг нь ч аятайхан илэрхийлэх боломж хомс, ялангуяа

R цэгийн талаар тун бага мэдээлэл байхад уг хоёр өнцөг хоёулаа R-с хамаарсан өнцгүүд юм. Оролдоод үзвэл ямар ч байсан $\angle QBR$-ийг тодорхой хэмжээнд задалж болно :

$$\angle QBR = \angle QBC + \angle CBR = \gamma + \angle CAR = \gamma + \angle QAD$$

Үүний $\angle QAD$ нь их тодорхойгүй өнцөг байна. Харин $\angle QRB$-ийг ингэж задалж болох юм :

$$\angle QRB = \angle QRA + \angle ARB = \angle QRD + \alpha$$

Энд $\angle QRD$ бүр эвгүй өнцөг гарч ирж байна, бид хэрхэн $\angle QRB = \angle QBR$ гэж харуулах вэ? Үүнийг эвтэйхэн өөр зорилгоор сольж чадахгүй бололтой.

Бидний сонгосон өнцөг хөөх арга зам нь зорилгодоо хэрхэн хүрэх нь тодорхойгүй боллоо. Өгсөн нөхцөл маань $PB = PD$ гэсэн сонирхолтой өгөгдөл агуулж байгааг саная. Бид бодлогоо бодохын тулд үүнийг заавал ашиглана гэж хэлж болно (хэрэв энэ нөхцөлгүйгээр, D нь BQ-ийн дурын цэг байхад бодлого бодогддог байсан бол үүнийг анхнаасаа өгөхгүй байх байсан). Гэвч $PB = PD$ гэдэгт шууд хэрэглээ бараг алга. Тэгэхээр, нөхцөл байдлаа товч дүгнэвэл: Бид $\angle QBR = \angle QRB$ гэдэг барьцгүй зорилгыг хэрхэн ашиглах нь мэдэгдэхгүй $PB = PD$ болон бусад өгсөн нөхцлүүдээс гаргаж авах ёстой. Гэхдээ яаж? Ийм тохиолдолд бидний хийж чадах хамгийн сайн юм нь өгсөн нөхцлүүдээрээ тоглож, юу гаргаж авч чадахаа харах юм . Тэгээд азаар зорилготойгоо төстэй юмтай таарна эсвэл $PB = PD$ гэдгийг ашиглаад үр дүн гаргах боломж олдоно гэж найдья.

Эхлээд α, γ-гаар илэрхийлж болох өнцгүүдээ олж тэмдэглье. Бид аль хэдийн $\angle BQA = \alpha + \gamma$ болохыг баталсан. Зургаа харвал өөр олон өнцөг олж чадаж байна : $\angle PBD = 2\alpha$ гэдгээс $\angle PDB = 2\alpha$ (учир нь $\triangle PBD$ адил хажуут) бөгөөд одоо $\triangle PDQ$-ээс $\angle DPQ = \angle PDB - \angle PQD = \alpha - \gamma$ болно. Даанч эдгээр өнцгүүдээс онцгой чанар ажиглагдахгүй байна.

Ингээд толгойд орсон бүх өнцгүүдээ хөөсөн ч үр дүн гарахгүй үед өгсөн нөхцлөө дахин ажиглая (бид нэгэнт ямар нэг зүг чиг өгөх юм олтлоо сохроор үр дүн эсвэл таамаглал хайхаар шийдсэн билээ). Зургаа анзаарвал PB шулуун тойргийг бараг шүргэж байгаа мэт харагдаж байна. Үнэхээр өгсөн нөхцлөө харвал энэ үнэн юм : $\angle PBA = \angle ACB = \alpha$ гэдгээс PB нь ABC-г багтаасан тойргийг шүргэнэ гэж гарах билээ. Энэ ажиглалт бараг хэрэг болохгүй мэт санагдах боловч эндээс юу мөрдөж гарахыг бодоод үзье. Тэгвэл огтлогч шүргэгчийн теоремоор $PB^2 = PA \cdot PC$ болно. Гэнэт $PB = PD$ болохыг санавал $PD^2 = PA \cdot PC$ гэж мөрдөхийг анзаарна! Тэгэхээр PD нь ADC-г багтаасан тойргийг шүргэх юм байна. Бид анх удаа $PB = PD$ гэдгээс өнцгөөс өөр сайн үр дүн гаргаж авч чадлаа.

Одоо үүнээс яг юу гарахыг бодож үзье, бид ADC-г багтаасан тойргийг сонирхохгүй байгаа тул шинэ үр дүнгээ энэ хэлбэрээр хадгалснаас өөр хэрэгтэй мэдээлэл болгосон нь дээр. Үүнийг $\angle PDA = \angle PCD$ ба $\angle PAD = \angle PDC$ гэж өнцгийн үр дүн болгож болох юм. Эдгээрээс $\angle PDA$ нь бусад цухал өнцгүүдтэй холбогдож байгаа тул $\angle PDA = \beta$ гэж тэмдэглээд өнцөг хөөж үзье. $\triangle PAD$-ээс $\angle DAQ = \angle DPQ + \angle PDA = \alpha + \beta - \gamma$ гэж олдоно, тэгэхээр бид хайж буй хоёр өнцгийнхөө нэгийг олох боломжтой боллоо :

$$\angle QBR = \angle DAQ + \gamma = (\alpha + \beta - \gamma) + \gamma = \alpha + \beta$$

Иймд бодлого маань

$$\boxed{\angle QRB = \alpha + \beta \text{ гэж харуул}}$$

болж хувирлаа. Өмнө нь $\angle QRB = \alpha + \angle QRD$ гэж задалж байснаа тооцвол дээрх зорилго $\angle QRD = \beta$-тай адил юм. Гэвч $\beta = \angle QCD$ болохыг санавал бид бодлогоо дахин нэг удаа эквивалентаар

$CQDR$ тойрогт багтана гэж харуул

гэж өөрчилж чадна.

Дээрх шинэ бодлого маань бас л гол хүндрэл болох R цэгээс салаагүй байгаа тул бид бодолтонд ойртож байгаа гэж баттай хэлж чадахгүй, бид бодлогынхоо хэлбэрийг нь өөрчлснөөс хэтрээгүй байж мэдэх юм. Ямар ч байсан $CQDR$ тойрогт багтана гэдгийг харуулах бүх аргаа туршиж үзье. Бид

i) $AQ \cdot AC = AD \cdot AR$ гэж харуулах

ii) Өнцөг хөөж батлах

гэсэн хоёр замаар явж болно. Эхнийхийг AR урт тооцоолоход хүндрэлтэй гэдэг шалтгаанаар түр хойш тавиад хоёрдахь зам буюу өнцөг хөөх аргаар эхэлж оролдож үзье. Даанч C, Q, D, R цэгүүдийн хооронд мэдэгдэж буй цөөхөн өнцөг байна : одоогоор $\angle QCD = \beta$ ба $\angle DQC = 180^\circ - \alpha - \gamma$ өөр өнцөг олж тэмдэглээгүй байгаа билээ. Тэгэхээр бид $\angle QRD = \beta$ эсвэл $\angle DRC = \alpha + \gamma$ гэж баталахад хангалттай. Эхнийх нь нэг алхам ухарсан хэрэг болох юм. Харин $\angle DRC$ хувьд зургаасаа харвал A, D, R нэг шулуун дээр орших тул энэ өнцөг $\angle ARC = \angle ABC$ тэй тэнцэнэ. Гэхдээ мэдээж $\angle ABC = \alpha + \gamma$ байна шүү дээ! Иймд $\angle DRC + \angle DQC = 180^\circ$ болж $CQDR$ тойрогт багтах нь батлагдлаа.

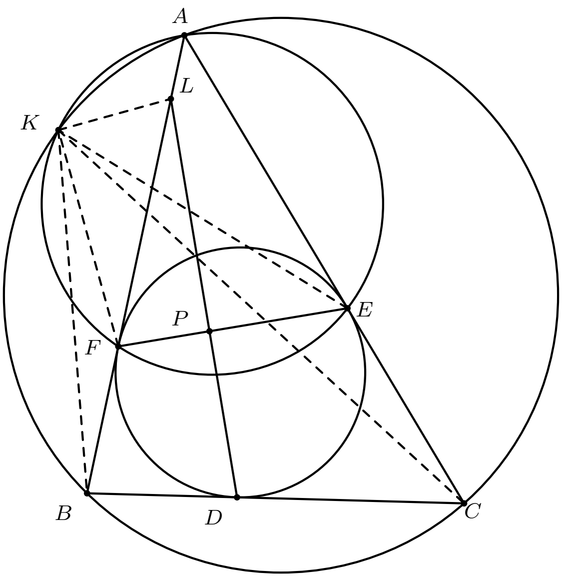
Тэгэхээр бидний хүнд байж магадгүй гэж бодож байсан $CQDR$ тойрогт багтана гэдэг нь R цэгийн тодорхойлолт болох AD-ийн ABC багтаасан тойргийг дахин огтлох цэг гэдгээс гарч байна. Бодолтоо дүгнэвэл

i) PB нь ABC багтаасан тойргийг шүргэдэг болон $PD = PB$ гэдгээс $\angle PDA = \angle PCD$ гэж гарахыг анзаарсан

ii) $CQDR$ тойрогт багтана гэдгийг азаар хялбар өнцөг хөөж баталсан гэсэн хоёр гол алхамтай байсан бөгөөд эхнийхийг анзаарч харч чадсан нь их тустай байлаа. □

Бодлого 4. (Иран 2012) ABC гурвалжинд багтсан тойрог гурвалжны BC, CA, AB талуудыг харгалзан D, E, F цэгүүдэд шүргэнэ. ABC, AEF гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд A цэгээс ялгаатай K цэгт огтлолцоно. D цэгийг дайруулан татсан EF шулуунд перпендикуляр шулуун AB шулууныг L цэгт огтолдог бол $\angle FKL = 90^\circ$ гэж батал.

Бодолт ▷ Эхлээд зургаа зуръя.



Бодлогоо бодож эхлэхийн өмнө өгөгдөл болон зорилгынхоо холбоо хамаарлыг тогтооё. Бидэнд өнцөг хөөхөд их эвтэйхэн цэгүүд өгөгджээ, үнэхээр гурвалжин ба үүний талуудыг шүргэх цэгүүд дээрх бараг бүх өнцөг хялбар илэрхийлэгдэнэ. Харин K, L цэгүүд бага зэрэг тодорхойгүй ч гэсэн энэ хоёр цэгийн талаар өнцөг оруулсан мэдээлэл байгаа. Тэгэхээр бид өнцөг хөөх аргыг сонгож авья. Зорилго руугаа нэг харвал $\angle FKL$ тооцоолоход хүндрэлтэй бололтой, бид K, L цэгүүдийг хэрхэн холбох вэ? Энэ өнцгийг $\triangle ABC$-ийн өнцгүүдээр илэрхийлэх боломжгүй мэт санагдана. Тэгэхээр магадгүй K, L-тэй холбоотой сайн үр дүн гаргаж ирэх эсвэл зорилгоо хялбаршуулах нь зөв байх. Юуны түрүүнд эхлээд олж чадах дотоод өнцгүүдээ тооцоолж зурган дээрээ тэмдэглье, дараа нь бодлогоо бодох дээр төвлөрнө.

Багтсан тойрог ба түүний шүргэлтийн цэгүүд бий учир $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ биш $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$ гэж тэмдэглэе(учир нь $\angle AFE = \angle AEF = 90° - \frac{\angle ABC}{2}$ гэх мэт хагас өнцгүүд олон гарч ирэх тул ингэж тэмдэглэвэл илүү эвтэйхэн). Тэгвэл $\alpha + \beta + \gamma = 90°$ болно. Зургаас

$$\angle AFE = \angle AEF = 90° - \alpha,\ \angle BFD = \angle BDF = 90° - \beta$$

ба $\angle CDE = \angle CED = 90° - \gamma$ биелнэ ($AF = AE$ буюу $\angle AFE = \angle AEF$ ба $EAF = 2\alpha$ учраас). Эдгээрийг ашиглан $\triangle DEF$-ийн өнцгүүдийг олж чадна :

$$\angle DEF = 180° - \angle AEF - \angle CED = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \gamma) = \alpha + \gamma$$

гэж гарах ба адилхнаар

$$\angle DFE = \alpha + \beta,\ \angle EDF = \beta + \gamma.$$

Ингээд D, E, F-тэй холбоотой өнцгүүдээ олсон тул $DL \perp EF$ гэдгийг ашиглан L дээрх өнцгүүдийг тооцоольё. $\angle DFE = \alpha + \beta$ тул

$$\angle FDL = 90° - \angle DFE = 90° - \alpha - \beta = \gamma$$

болж байна, адилхнаар $\angle EDL = \beta$ болно. $\triangle LFD$-ийн хувьд $\angle BFD = 90° - \beta$ учраас $\angle LFD = 90° + \beta$ ба $\angle FDL = \gamma$ учраас

$$\angle FLD = 180° - (90° + \beta) - \gamma = 90° - \beta - \gamma = \alpha$$

болно. Иймэрхүү байдлаар олж чадах өнцгүүдээ олох нь бодолтын дараагийн алхмуудад хэрэг болдог. Бид одоо хүртэл K цэгтэй холбоотой ямар ч ажиглалт хийсэнгүй, гэвч $\triangle ABC$ ба $\triangle AFE$-ийн өнцүүдийг мэдэх тул K нь энэ хоёр гурвалжныг багтаасан тойргийн огтлолцлын цэг гэдгийг ашиглан өнцөг хөөвөл K цэгийн тухай мэдээлэлтэй болох бүрэн боломжтой. Үнэхээр

$$\angle FKE = \angle FAE = 2\alpha,\ \angle BKC = \angle BAC = 2\alpha$$

гэх мэт биелнэ. Иймээс $\angle FKE = \angle BKC$ буюу $\angle BKF = \angle CKE$ болно. Хэрэв зургаа яг зөв зурсан бол $\angle FKE = \angle BKC$ ба $\angle BKF = \angle CKE$ нь $\triangle FKE \sim \triangle BKC$ ба $\triangle BKF \sim \triangle CKE$ гэж таамаглахад хүргэж болох юм (зураг зөв зурахын нэг ач холбогдол нь зургаасаа таамаглал гаргадагт байдаг), үнэхээр нүдэн баримжаагаар үнэмшилтэй харагдаж байна. Энэ үнэн болов уу, бид үүнийг батлаж чадах уу? Гурвалжнуудаа харвал бид $KFEA$ ба $KBCA$ тойрогт багтана гэдгээс $\triangle FKE, \triangle BKC$ ба $\triangle BKF, \triangle CKE$-н өнцгүүдийг олох боломжтой байна : $\angle KEF = \angle KAF = \angle KAB = \angle KCB$ ба $\angle KBF = \angle KBA = \angle KCA = \angle KCE$. Тэгэхээр ӨӨ шинжээр $\triangle FKE \sim \triangle BKC$ ба $\triangle BKF \sim \triangle CKE$ гэж гарна, ө.х бидний таамаглал үнэн байжээ.

Ингээд тодорхой хэмжээний үр дүнтэй болсныхоо дараа зорилго дээрээ төвлөрье. Бид $\angle FKL$-ийг байгаа өнцгүүдээрээ илэрхийлж чадахгүй байгаа учраас бодлогоо төгсгөлөөс нь хөөж, батлах $\angle FKL = 90°$-ийг илүү хялбар бодлогоор солих гэж оролдьё. $\angle FKL = 90°$ гэдгээс юу хэлж чадах вэ? Зургаа ажиглавал F, L цэгүүдийг дайрсан перпендикуляр FE, DL шулуунууд байгаа, тэгэхээр эдгээрийн огтлолцол $DL \cap FE = P$ цэг дээр $90°$-ийн өнцөг гарч ирнэ: $\angle FPL = 90°$. Мөн $\angle FKL = 90°$ гэдгээс $FKLP$ багтсан дөрвөн өнцөгт гэж гарна. Адилхнаар $FKLP$ тойрогт багтана гэдгийг харуулсан байхад $\angle FKL = 90°$ гэж гарах билээ, иймд бид зорилгоо $FKLP$ тойрогт багтана гэж харуул гэдгээр сольж болох юм. Гэхдээ энийг цааш өөрчилж болохоор санагдана, бидэнд энэ дөрвөн өнцөгтийн өнцгүүдээс $\angle FLP$ байгаа билээ. Үүнийг ашиглан $\angle FLP = \angle FLD = \alpha$ учраас $\angle FKP = \alpha$ болно. Эсрэгээр нь, бид $\angle FKP = \alpha$ гэж баталсан байгаа гэвэл $\angle FLP = \alpha$ учраас $FKLP$ тойрогт багтах ба $\angle FPL = 90°$ гэдгээс $\angle FKL = 90°$ гэж гарч бодлого бодогдоно. Иймд $\angle FKP = \alpha$ гэж батлахад хангалттай боллоо. Бидэнд одоо L цэг хамаагүй болж байна (цэгийнхээ тоог багасгаж алхам тутамдаа зургаа энгийн болгох нь геометрийн бодлого бодох сайн стратегиудийн нэг юм). Мөн $\angle FKE = 2\alpha$ болохыг саная, иймд $\angle FKP = \alpha$ гэдэг нь KP нь $\angle FKE$-ийн биссектрисс гэдэгтэй эквивалент.

Ийнхүү түр бодлогоо төгсгөлөөс нь хөөхөд $\angle FKL = 90°$ нь дараах

i) $FKLP$ тойрогт багтана

ii) $\angle FKP = \alpha$

iii) KP нь $\angle FKE$-ийн биссектрисс

олон өгүүлбэрүүдтэй эквивалент болохыг олж тогтоолоо. Бид эдгээрээс аль ойрхон санагдсаныгаа аваад баталж болно. Энэ удаад бид дараах хувилбарыг сонгож авья, учир нь энэ нь L цэгийг оруулахгүй байгаа юм (хаая аль замаар явахаа үнэхээр бүгдийг нь турших үзэхээс өөр аргагүй болдог - ө.х "trial and error" заавал хэрэг болно).

KP нь $\angle FKE$-ийн биссектрисс болно гэж батал.

Одоо үүнийг хэрхэн батлах вэ? Бидэнд K, P цэгүүдийг холбосон үр дүн байхгүй байгаа. Тэгэхээр үүнийг биссектриссийн чанараар талын уртуудтай холбосон нөхцөл болгож солих нь боломжит ганц арга зам байж магадгүй. Биссектриссийн чанар ёсоор, KP нь $\triangle FKE$-ийн биссектрисс байх нь гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\frac{FK}{EK} = \frac{FP}{EP}$ байна. Тэгэхээр бид дээрх бодлогын оронд дараах бодлогыг бодоход хангалттай.

$$\frac{FK}{EK} = \frac{FP}{EP} \text{ гэж батал.}$$

K цэгээс гарсан тал, хэрчимийн уртын талаарх мэдээлэл бага байхад зорилгодоо FK, EK оруулцуулах нь буруу шийдвэр байж магадгүй. Азаар бидэнд $\frac{FK}{EK}$-ийг олоход туслах үр дүн байгаа билээ : $\triangle BKF \sim \triangle CKE$. Үнэхээр, үүнийг ашиглан дээрх харьцааг батлах эсвэл ядаж илүү хярбарчлах боломжтой болохыг анзаарья. $\triangle BKF$-ийн FK талд $\triangle CKE$-ийн EK тал харгалзана. Иймээс $\frac{FK}{EK}$ нь энэ хоёр гурвалжны төсөөгийн коэффициенттэй тэнцүү байна. Өөрөөр хэлбэл

$$\frac{FK}{EK} = \frac{BK}{CK} = \frac{BF}{CE}$$

гэх мэт харьцаанууд биелнэ. Эдгээрээс BF ба CE нь оройгоос багтсан тойрогт татсан шүргэгчийн урт учраас гурвалжны талуудаар илэрхийлж чадна, өөрөөр хэлбэл бусдаасаа илүү ашигтай учраас $\frac{FK}{EK}$ харьцааг $\frac{BF}{CE}$-ээр солиод

$$\frac{BF}{CE} = \frac{FP}{EP} \text{ гэж батал.}$$

гэсэн бодлоготой үлдье. Ийнхүү бодлогоо ардаас нь явж алхам тутамдаа хялбаршуулсаар одоо анх хүндрэл болж байсан K, L цэгүүд ороогүй өгүүлбэр батлахад хүрлээ. Тэгэхээр бид тодорхой амжилттай явж байна гэж дүгнэж болох юм.

Одоо үүнийг хэрхэн батлах талаар бодоцгооё. Бид илүү цөөхөн цэгтэй хялбар зурагтай үлдсэн тул ямар ч харьцаа тооцоолоход амар байх талтай. Үнэхээр бид талын урт тооцоолох техникүүдээр дээрх харьцаанд орж буй бүх уртыг олох боломжтойг анзаарья. BF ба CE уртууд үндсэн гурвалжнийхаа талуудаар хялбар илэрхийлэгдэнэ. FP ба EP хувьд энэ нь $\triangle DEF$-ийн нэг оройгоос буулгасан перпендикулярын суурийн нөгөө хоёр орой хүртэлх зай учир $\triangle DEF$-ийн тал ба өнцгүүдээр хамааруулж олбол эвтэйхэн, үнэхээр $\angle FDP = \gamma$, $\angle EDP = \beta$ учир $FP = FD \sin\gamma$ ба $EP = DSE \sin\beta$ болно. Тэгэхээр бид

$$\frac{BF}{CE} = \frac{FD \sin\gamma}{DE \sin\beta}$$

гэж батлахад хангалттай боллоо, бас $\triangle BFD$ ба $\triangle CED$-ийн өнцгүүд бий учир бид синусын теорем ашиглан FD ба DE-ийг BF ба CE-ээр илэрхийлэн олж болно. Ийнхүү бид бага зэрэг тригонометр тооцоо хийгээд л бодолтыг гүйцээх боломжтой боллоо. Синусын теорем ёсоор

$$\frac{BF}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{FD}{\sin 2\beta} \text{ ба } \frac{CE}{\sin(90^\circ - \gamma)} = \frac{DE}{\sin 2\gamma},$$

иймээс

$$FD = BF \cdot \frac{\sin 2\beta}{\sin(90^\circ - \beta)}, DE = CE \cdot \frac{\sin 2\gamma}{\sin(90^\circ - \gamma)}$$

болно. Давхар өнцгийн томъёо ба $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ гэдгээс

$$FD = BF \cdot \frac{2\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta} = 2BF \sin\beta$$

ба

$$DE = CE \cdot \frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\gamma} = 2CE \sin\gamma$$

гэж гарна, тэгэхээр батлахаар зорьж буй тэнцэтгэл

$$\frac{FD \sin\gamma}{DE \sin\beta} = \frac{2BF \sin\beta \sin\gamma}{2CE \sin\gamma \sin\beta} = \frac{BF}{CE}$$

болж батлагдав. □

Тэмдэглэл Дээрхи бодолтын тригонометр тооцоо бүхий хэсгийн оронд $\frac{BF}{CE} = \frac{FP}{EP}$ гэдгийг төсөө ашиглан дараах байдлаар харуулж болно. FD ба ED-ийн дунджуудыг харгалзан B_1 ба C_1 гэж тэмдэглье. $BF = BD$ ба $CD = CE$ болохыг санаяа, тэгэхээр $BB_1 \perp FD$ ба $CC_1 \perp ED$ болно. Бас $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$ учраас $\angle FBB_1 = \beta$ ба $\angle ECC_1 = \gamma$. $\triangle FDP$ ба $\triangle DCC_1$ нь $\angle FPD = \angle DC_1C = 90°$ ба $\angle FDP = \gamma = \angle DCC_1$ учраас $\triangle FDP \sim \triangle DCC_1$, эндээс

$$\frac{FP}{FD} = \frac{DC_1}{DC} = \frac{DE}{2DC}$$

буюу

$$FD = \frac{DE \cdot FD}{2DC}$$

гэж гарна. Адилхнаар,

$$EP = \frac{DE \cdot FD}{2BD}$$

гэж гарна, Иймээс

$$\frac{FP}{EP} = \frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CF}$$

болж батлагдана. □

Бодлого 1 ба Бодлого 4-ийн бодолтонд нэг адилхан хэсэг байна, хоёуланд нь хоёр тойргийн огтлолцлын цэг ба нэгийг дайрсан хоёр шулууны тойргуудтай огтлолцох цэгүүд бүхий геометрийн зурагнаас өнцөг хөөн үр дүнгүүд гаргаж авч байсан. Үүнийг дараах леммүүдийг мэддэг байсаны үр дүнд олж харсан юм.

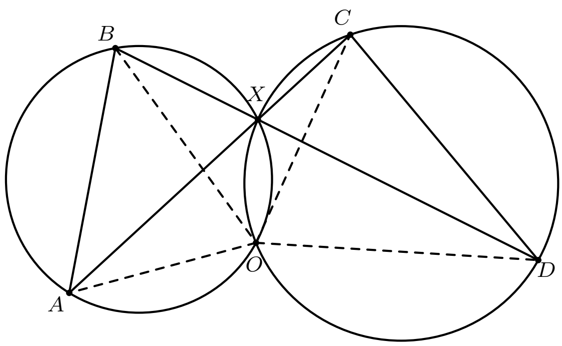
Спирал төсөө гэдэг нь ямар нэг A цэг, φ чиглэлт өнцөг ба t бодит тооны хувьд хавтгайн дурын $X \neq A$ цэгийг $\angle XAY = \varphi$ ба $AY = t \cdot AX$ байх цор ганц Y цэгт буулгах хувиргалт юм. Өөрөөр хэлбэл, A цэгт төвтэй φ өнцгөөр эргүүлэх эргүүлэлт ба t коэффициенттэй гомотетийн композиц болно.

Лемм 1. Ялгаатай AB ба CD хэрчмүүдийн хувьд AB-г CD-д буулгах спирал төсөө олддог байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $ABDC$ энэ дараалалаараа параллелограмм биш байх юм. Энэ тохиолдолд спирал төсөө цор ганц олдох ба төв нь O бол

a) Хэрэв $AC \not\parallel BD$ бол $AC \cap BD = X$ гэвэл ABX ба CDX гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн хоёр дахь огтлолцлын цэг нь O байна.

b) Хэрэв $AC \parallel BD$ бол $O = AB \cap CD$ байна ($ABDC$ параллелограмм биш тул $AB \not\parallel CD$).

Баталгаа.



Уншигчдад дасгал болгон үлдээв. □

Лемм 1-ийн хувьд O цэг нь мөн AC хэрчмийг BD хэрчимд буулгах спирал төсөөний төв болдог болохыг тэмдэглэе. Нөгөө талаас, бид AC хэрчмийг BD хэрчимд буулгах спирал төсөөний төвийг Лемм 1 ашиглан байгуулж чадна : $AB \cap CD = Y$ гэвэл YAC, YBD гурвалжнуудыг багтаасан тойргуудын хоёр дах огтлолцлын цэг нь AC хэрчмийг BD хэрчимд буулгах төсөөний төв болно. Уг төв цор ганц олдох тул O нь YAC ба YBD гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн огтлолцлын цэг болох ёстой. Эдгээрийг нэгтгэвэл A, B, C ба D цэгүүдийн хувьд $AC \cap BD = X$, $AB \cap CD = Y$ гэвэл ABX, CDX, YAC ба YBD гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд нэг цэгт огтлолцоно гэж гарна. Ийнхүү бид дараах леммийг баталлаа.

Лемм 2. A, B, C, D цэгүүдийн хувьд $AC \cap BD = X$, $AB \cap CD = Y$ гэвэл ABX, CDX, YAC ба YBD гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд нэг цэгт огтолцоно. Өөрөөр хэлбэл, гүйцэд дөрвөн өнцөгтийн дөрвөн гурвалжныг багтаасан тойргууд нэг цэгт огтлолцоно.

Энд гүйцэд дөрвөн өнцөгт гэдэг нь A, B, C, D цэгүүдийн хувьд $AC \cap BD = X$, $AB \cap CD = Y$ бол A, C, B, D, X, Y цэгүүдийг гүйцэд дөрвөн өнцөгт гэдэг. Өөрөөр хэлбэл, гүдгэр дөрвөн өнцөгт эсрэг талуудын огтлолцлын цэгүүдийн хамт гүйцэд дөрвөн өнцөгт болно. Лемм дээрх дөрвөн тойргийн ерөнхий цэгийг уг гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн Микелийн цэг гэх ба дээрх леммийг Микелийн теорем гэдэг. Одоо дээрх леммүүд Бодлого 1 ба Бодлого 4 дээр хэрхэн хэрэглэгдсэнийг товч дурдья.

Бодлого 1 хувьд A, M, N, B_1 ба B, M, N, A_1 цэгүүдийг нэг тойрог дээр оршихыг батлах нь M-ийг C, A_1, N, B_1, A, B гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн Микелийн цэг болохыг батлахтай эквивалент ба M нь CAA_1 ба CBB_1 гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн огтолцлын цэг болохыг батлахад M нь Микелийн цэг гэж мөрдөнө. Иймд үндсэн бодлогоны оронд "C, A_1, M, A ба C, B_1, M, B цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал"бодлогыг бодоход хангалттай болсон юм.

Харин Бодлого 4 хувьд $BF \cap CD = A$ ба K нь AFE ба ABC гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн хоёр дахь огтлолцлын цэг учир K нь BC-г FE-д буулгах спирал төсөөний төв болно. Эндээс $\triangle KBF \sim \triangle KCE$ гэж гарах тул $\frac{FK}{EK} = \frac{BE}{CE}$. Бид $\frac{FK}{EK} = \frac{FP}{EP}$ болохыг батлах ёстой болсны дараа, дээрх ажиглалтыг ашиглан $\frac{FP}{EP} = \frac{BF}{CE}$ болохыг батлахад хүрэх бөгөөд олоход амаргүй санагдах $\frac{FK}{EK}$ харьцааг олж чадлаа.

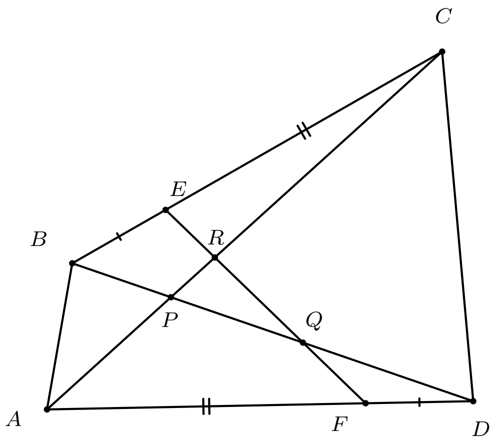
Мэдлэг болон туршлага геометрийн бодлого дээр ингэж хэрэглэгддэг. Хэдийгээр бодлогоо оролдох явцад бодлого бодох стратегиудаар өөрийгөө залуурдах боловч мэдлэг болон туршлага шууд ашиглаж болох үр дүн (жишээ нь Бодлого 4 хувьд $\triangle KBF \sim \triangle KCE$) болон зөв санаа гаргахад тусална. Геометр дээр чухал геометрийн обьект, зурагнууд ба үүний онцгой чанаруудыг мэддэг болж өгсөн бодлого дээр таньж ашигладаг болох хэрэгтэй. Спирал төсөө бол зөвхөн нэг ийм геометрийн обьект бөгөөд цаашдаа бодлого дээр A, B, C, D дөрвөн цэгийн хувьд $X = AC \cap BD$ байгуулаад $\triangle ABX, \triangle CDX$ багтаасан тойргуудын хоёр дах огтлолцлын цэгийг авсан байвал бидэнд шууд спирал төсөө байж байна гэсэн үг. Эсвэл энэ цэгийг авч үзээгүй байсан ч бид өөрсдөө байгуулаад ашиглаж болно, ө.х бидний мэдлэг санаа олоход тусалж чадна. Бодлоготойгоо хангалттай ажиллаж нөхцөл байдлаа мэдэрсний дараа эдгээр мэдлэгүүдээ хэрхэн ашиглах нь толгойд шууд орж ирдэг болдог. Иймд уншигчдад геометрийн бэлтгэл хийхдээ бодлого бодох стратеги, асуудал шийдэх зан үйлээ хөгжүүлэхээс гадна олон түгээмэл ба түгээмэл бус геометрийн обьект, цэгүүдийн онцгой шинж чанаруудыг судалж, бодлого дээр ашиглаж сурахыг зөвлье.

Дасгал (ММО54, III даваа) Элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан тойрог гурвалжны AB, BC, CA талуудыг харгалзан C_1, A_1, B_1 цэгүүдээр шүргэнэ. AC_1B_1 гурвалжныг багтаасан тойрог ABC гурвалжныг багтаасан тойрогтой A цэгээс ялгаатай T цэгээр огтлолцоно. TA_1 шулуун BTC өнцгийн биссектрисс гэдгийг батал.

Одоо Лемм 1 ба Лемм 2-ийг ашиглан бодогдох нэгэн бодлого авч үзье. $\blacksquare$

Бодлого 5. (IMO 2005) $BC = DA$ бөгөөд BC, DA параллель биш байх $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. E, F цэгүүд харгалзан BC, DA талууд дээр $BE = DF$ байхаар гүйнэ. AC, BD шулуунууд P цэгт огтлолцох бөгөөд BD, EF шулуунууд Q цэгт, EF, AC шулуунууд R цэгт огтлолцоно. E, F цэгүүд гүйж байхад PQR гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд P-ээс өөр ерөнхий цэгтэй болохыг батал.

Бодолт ▷ Эхлээд зургаа зуръя.



Бид хэрхэн бүх PQR гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд P-ээс өөр нэг цэгийг дайрна гэж харуулах вэ? Энэ их ховор таардаг, барьцгүй зорилго байна. Бид P-ээс ялгаатай ерөнхий цэг нь ямар цэг болохыг мэдэхгүй байна. Ийм бодлого дээр ихэвчлэн хамгийн сайн арга нь хувьсаж буй цэгүүд (манай бодлогийн хувьд E, F)-ээс үл хамаарах нэг бэхлэгдсэн цэг байгуулаад дараа нь тэр цэг бүх PQR гурвалжнуудын багтаасан тойрог дээр оршино гэж харуулах байдаг. Өөрөөр хэлбэл, бид

(i) Хувьсаж буй цэгүүдээс үл хамаарах бэхлэгдсэн цэг байгуулах

(ii) Тэг цэг өгсөн нөхцөлийг хангахыг батлах

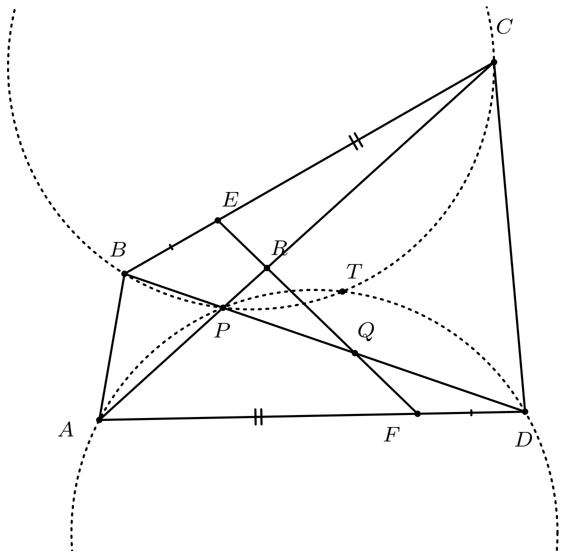
гэсэн хоёр "ажил" хийнэ гэсэн үг.

Эхний хэсэг (i) биднээс тэр цэгийг тааж байгаад ч хамаагүй олохыг шаардаж байна. Харин хоёр дахь хэсэг (ii) нь (i) дээр ямар цэг байгуулснаас шалтгаална. Эхлээд бид уг онцгой цэгээ тааж олохыг хичээе. Бид E, F цэгүүдийг онцгой байдлаар сонгох эсвэл уг цэгийг олоход хялбар $ABCD$-н тухайн тохиолдлыг авч үзэж болно. Ихэнхи бодлого иймэрхүү байдлаар тааж олоход харьцангуй хялбар байдаг ч энэ бодлого дээр онцгой цэгийг иим цэг гэж хэлэх ямар ч үндэслэл алга. Өөрөөр хэлбэл (i) алхмыг хэрхэн биелүүлэх нь тодорхойгүй боллоо.

Хааяа шууд зорилго руугаа дайраад бүтэлгүйтвэл бодлогынхоо бүтцийг судлан, зүгээр л бодлоготойгоо "тоглох" хэрэгтэй байдаг. Тэгэхээр гаргаж болох ямар ч хамаагүй үр дүн олж аваад тэр нь зорилготой маань дөхүүлнэ гэж найдаад ажиглалт хийхийг хичээе. Өгсөн нөхцөл $BC = AD$ ба $BE = DF$ нь их цомхон, бас хэрхэн ашиглагдах нь тодорхойгүй байна. Бид эдгээрээс юу хэлж болох вэ? гэж асуух хэрэгтэй. $BC = AD$ ба $BE = DF$ гэхээр $CE = AF$ гэсэн үг. Энэ нь E, F цэгүүд харгалзан BC, AD хэрчмүүдээр хэрчмээ яг адилханаар хуваaж байхаар гүйж байгаа мэт сэтгэгдэл төрүүлж байна. Тэгэхээр хэрэв BC хэрчмийг DA хэрчим дээр аваачиж тавиж болдог бол E цэг F дээр очно. Энэ нь BC хэрчмийг DA хэрчимд буулгадаг (яг үнэндээ, B-г D, $C-$г A-д буулгадаг) τ спирал төсөөг санал болгож байна, үнэхээр τ хувиргалтаар E цэг F-руу бууна.

Иймхүү бид өмнө нь сурсан мэдлэг, үзсэн онолоо энэ бодлого дээр ашиглах боломжтой боллоо.

Эхлээд энэ ажиглалтаасаа гаргаж чадах бүх мэдээлэлийг шахаж гаргая. Уг спирал төсөөнөөс юу хэлж болох вэ? $BC = DA$ тул τ-ийн гомотетийн коэффициент 1 буюу τ нь эргүүлэлт болно. Мөн спирал төсөөний төвийн байгуулалт ёсоор τ-ийн төвийг T гэвэл T нь (APD), (BPC)-ийн хоёр дах огтлолцлын цэг байх билээ (хэрэв шүргэлцдэг бол $T = P$).



Тэгэхээр $T \in (APD) \cap (BPC)$ төвтэй τ эргүүлэлтээр B, E, C цэгүүд D, F, A цэгүүд дээр буух учраас $TB = TD$, $TC = TA$ ба $TE = TF$ болно. Бид хувьсаж буй E, F цэгүүдтэй холбоотой сайн чанар хангадаг бэхлэгдсэн T цэгтэй боллоо. Одоо хэрхэн Q, R цэгүүдтэй холбоотой үр дүн гаргах вэ?

Магадгүй T нь BE-г DF-д буулгах спирал төсөөний төв болохыг ажиглавал дахиад Лемм 1 ашиглаж болох юм (учир нь τ хувиргалтаар B цэг D рүү, E цэг F рүү буух тул BE хэрчим DF хэрчим рүү бууна). Үнэхээр $Q = BD \cap EF$ ба $R = AC \cap EF$ нь харгалзан BE-г DF-д, EC-г FA буулгах спирал төсөөний төвийг олох гэж хийсэн нэмэлт байгуулалт мэт санагдаж байна. (BEQ), (DFQ)-ийн хоёр дах огтлолцлын цэг нь BE-г DF-д буулгах спирал төсөөний төв билээ. Уг спирал төсөө цор ганц олддогийг санавал $T \in (BEQ), T \in (DFQ)$ гэж гарна. Адилхнаар $T \in (BER)$, $T \in (DFR)$ байна.

Бидний байгуулсан T цэг маш олон гоё чанар хангадаг цэг ажээ. Одоо P, Q, R, T цэгүүдийн хооронд өнцөг хөөх их боломжтой боллоо. Магадгүй T цэг (i) алхам дээр байгуулах ёстой байсан PQR гурвалжнуудыг багтаасан тойрог дээр оршдог цэг юм болов уу? Зурсан зургаа харахад (PQR) дээр T цэг оршдог юм шиг л харагдаж байна. Тэгэхээр бид одоо

T цэг бүх PQR гурвалжныг багтаасан тойргууд дээр оршино.

гэж батлахыг зоръё (гэхдээ бид ийм болохыг таамагласан, худлаа байх боломжтой гэдгийг санах хэрэгтэй).

T цэг (CEQ), (AFQ), (BER), (DFR) болон (APD), (BPC) дээр оршино гэсэн олон мэдээлэл байгаа учраас шууд өнцөг хөөж бүх өнцгөө олох боломжтой мэт санагдана. Тэгэхээр тойрогт багтах нөхцлийг шалгацгаая. Зургаа ажиглавал $\angle RQT, \angle RPT$ авч үзэхэд эхнийхийг $BETQ$ багтсан дөрвөн өнцөгтөөс, хоёрдахийг $BPTC$ багтсан дөрвөн өнцөгтөөс олж чадах юм байна :

$$\angle RQT = \angle EQT = \angle EBT = \angle CBT$$

ба

$$\angle RPT = \angle CPT = \angle CBT$$

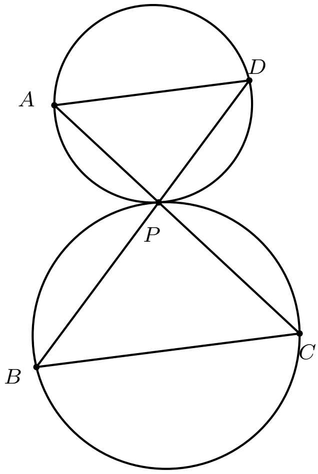
гэдгээс $\angle RQT = \angle RPT$ гэж гарч $T \in (PQR)$ болох нь батлагдана. Ийнхүү (APD), (BPC)-ийн хоёр дах огтлолцлын цэг T-ийн хувьд T нь бүх PQR гурвалжныг багтаасан тойрог дээр орших нь батлагдлаа.

Бодлого маань бараг л бодогдлоо. Гэхдээ нэг жижиг, олж харахад хэцүү хэсэг үлдсэн: бодлого маань (PQR) тойргууд P-ээс өөр ерөнхий цэгтэй гэж батлахыг шаардаж байгаа учраас $T \neq P$ гэж харуулах ёстой. Мөн дээрх бодолт BC, DA параллель биш гэдгийг ашиглаагүй. Тэгэхээр $BC \nparallel DA$ гэдгээс $T \neq P$ гэж гарах юм шиг байна.

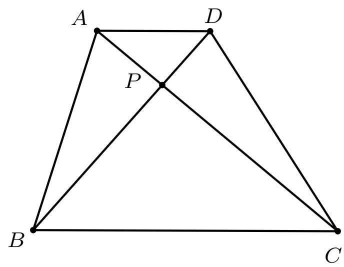
$T \neq P$ гэдгийг батлах хүнд биш бөгөөд олон янзаар харуулж болно. Бид дараах замыг сонголоо :

Чанар $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд AC, BD нь P цэгт огтлолцдог бол (APD), (BPC) тойргууд P цэгт шүргэлцэх нь зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь AD, BC параллель байх юм.

Баталгаа. Хэрэв шүргэлцдэг бол P цэгт төвтэй (APD) тойргийг (BPC)-д буулгах H гомотет олдоно. $P \in AC$, $P \in BD$ тул $A \overset{H}{\mapsto} C$, $D \overset{H}{\mapsto} B$ тэгэхээр $AD \parallel BC$ байна.



шүргэлцэж буй тохиолдол



параллель тохиолдол

Харин параллель бол P төвтэй A-г C, D-г B-д буулгах H гомотет олдоно. Уг гомотетоор $\triangle APD \overset{H}{\mapsto} \triangle CPB$ тул $\triangle APD \overset{H}{\mapsto} \triangle BPC$ байх юм. H-н төв P нь (APD), (BPC) дээр орших тул эдгээр тойргууд шүргэлцэнэ. $\square$

Ингээд бодлого бодогдов. $\square$

Дээрх бодлогоны хувьд бид τ спирал төсөө E-г F цэг рүү зөөж буйг анзаарах хүртэл бараг юу ч хийж чадаагүй байсан. Харин спирал төсөөг анзаарсны дарааа τ нь мөн EC-г FA, BE-г DF-д буулгах спирал төсөө болохыг харж чадвал бодлого ерөнхийдөө бодогдсон (цаана нь бага зэрэг өнцөг хөөх л үлдсэн). Энэ бодлого тойрог, хоёр тойргийн огтлолцол гэсэн спирал төсөө шууд санагдуулах өгөгдөлгүй байсан ч спирал төсөөгөөр бодогддог гоё жишээ бодлого юм. Ер нь сайн бодлого гаднаасаа ямар ч харагдаж байсан гэсэн итгэмээргүй аргаар бодогдох тохиолдол олон бий.

Тэмдэглэл Олимпиадын бодлого дунд дээрх $T \neq P$ шиг жижиг зальтай хэсэг орсон бодлого олонтаа тааралддаг. Ийм хэсгийг нь бодоогүй орхисноос болж 1 оноо хасуулах тохиолдол бас олон гарна. Хувийн туршлагаас хуваалцахад 2019 оны ОУМО-ийн 2-р бодлого бас геометрийн бодлого байсан. Би уг бодлогыг бодохдоо хоёр шулууны огтлолцлын цэгийг нэмэлтээр байгуулаад бодсон бөгөөд надад бодолт маань эмх цэгцтэй, уран болсон юм шиг санагдаж байлаа. Дараа нь би тэр бодлого дээр 1 оноо хасуулж 6 оноо авсан. Тэр хоёр шулуун параллель тохиолдлыг би хаясан байв. Параллель тохиолдлыг хааяа хаясан ч асуудалгүй байдаг (проектив геометр талаас нь авч үзсэнээр бодолт хоёр шулуун параллель байсан ч огтлолцлын цэгтэй гэж үзэж болдог) боловч миний бодолт дээр уг огтлолцлын цэгээ ашиглан өнцөг хөөж, нэг тойрог дээр оршино гэж харуулсан учраас яалт ч үгүй 1 оноо хасуулах болсон юм. Заримдаа ийм хайран 1 оноо медалийн өнгө өөрчлөх тохиолдол ч гарна. Үүний хамгийн харамсалтай жишээ нь Монголын ОУМО-д хамгийн өндөр амжилт гаргасан 2004 оны ОУМО, тэр жил Монголын баг 1-р бодлого (бас геометр) дээрээ багаараа 6 оноо авсан. Хэрэв бүгд 7 оноо авсан бол Монголын анхны багаараа медаль хүртсэн жил болох байсан бөгөөд мөн нэг алтан медаль авах байлаа. Иймээс бодолтоо бүрэн болсон эсэхийг сайн шалгаж байх хэрэгтэй бөгөөд "ингээд болчих байлгүй дээ"гэсэн хандлага гаргаж болохгүй.

§2.2 Аналитик геометр

Энэ хэсэгт бид геометрийн бодлогыг аналитик буюу тооцооллын механик аргаар бодох тухай авч үзье. Аналитик техник гэдгээр

- Комплекс тоо

- Барицентр координат

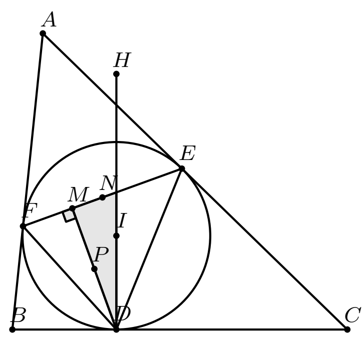
- Тригонометр

- Хавтгайн координатийн систем (Декартын координат ч гэдэг) гэх мэт олон аргуудыг хэлж байгаа болно. Эдгээр техникүүд бүгд геометрийн бодлогыг алгебрийн адилтгал руу хувиргадаг бөгөөд бүгд урт, нүсэр тооцоо хийхэд хүрнэ. Гэхдээ давуу тал нь синтетик бодолт олох гэж хичээж байснаас цаг авах ч гэсэн сэтгэж ядаад байх юмгүй, зүгээр л адилтгал батлахад хангалттай болдог.

Одоо аналитик техникээр геометрийн бодлого бодоцгооё. Энэ номонд бид зөвхөн тригонометрийг авч үзнэ. Энэ нь зохиогчийн дуртай арга юм.

Бодлого 6. (Ираны сорил) ABC гурвалжинд багтсан I төвтэй тойрог BC, CA, AB талуудыг харгалзан D, E, F цэгүүдэд шүргэнэ. D-ээс EF-д буулгасан перпендикулярын суурь M ба DM-ийн дундаж цэг P байг. Хэрэв H нь BIC гурвалжны ортотөв бол PH хэрчим EF хэрчмийн дундаж цэгийг дайрна гэж батал.

Бодолт ▷ Эхлээд зургаа зуръя. EF-ийн дунджийг N гэж тэмдэглье. Бид P, N, H-г нэг шулуун дээр оршино гэж харуулна.



Одоо бодлогоо сайн ажиглаж, өгөгдөл болон зорилгодоо анализ хийж үзье (ямар ч бодлогыг ингэж эхлүүлэхэд зүгээр байдаг). Бидэнд өгөгдсөн өгөгдөл нь багтсан тойрог, D-ээс EF-д буулгасан перпендикуляр, DM-ийн дундаж цэг болон BIC-ийн ортотөв. Эдгээрээс багтсан тойрог болон D-ээс FE-д буулгасан перпендикуляр нь өнцөг хөөхөд эвтэйхэн харагдаж байна. Үнэхээр бид ABC гурвалжны өнцгүүдээр DEF гурвалжны өнцгүүд болон $\angle EDM$, $\angle FDM$ (M цэгтэй хамаатай чухал өнцгүүд)-г олох боломжтой. Харин BIC-ийн ортотөв яльгүй онцгүй өгөгдөл байна, гэхдээ л $H \in DI$ болон $\angle HBC$, $\angle HCB$ гэх мэт өнцгүүд мэдэгдэж байна ($\angle HBC = 90^\circ - \angle ICB = 90^\circ - \frac{\angle HCB}{2}$ гэх мэт). Хамгийн онцгүй цэг нь P: бидэнд өндрийн дундажтай холбоотой түгээмэл чанар байхгүйгээс гадна энэ нь үндсэн гурвалжин ABC биш DEF гурвалжны өндрийн дундаж байна. Дээрх анализаар бид хоёр зүйлийг ойлголоо.

1. Өнцөг хөөхөд эвтэйхэн юм байна

2. P цэг хүндрэл болж байна

Бид одоо батлах үр дүнгээ авч үзье. Бид P, N, H-г нэг шулуун дээр оршихыг харуулна. Үүнийг синтетик аргаар батлах тийм ч амар биш бололтой. Учир нь P, N, H цэгүүд ямар ч холбоо хамааралгүй гурван цэг шиг санагдаж байна. P нь DM-ийн дундаж, N нь EF-ийн дундаж, H нь BIC-ийн ортотөв (шууд холбогдох хамаарал харагдахгүй байна). Ийм тохиолдолд зургаа сайн ажиглаж өөр гарц хайхаас өөр аргагүй (ямар нэг байдлаар баталж болох л ёстой доо? яг ямар замаар харуулах вэ?). Нэгэнт P, N, H-ийг холбосон үр дүн гаргаж чадахгүй бол хүчээр нэг шулуун болохыг харуулья. Хэсэг ажиглавал эдгээр гурван цэг нь зурагт будагдсан гурвалжны талуудаас авсан цэгүүд байна, тэгэхээр P, N, H нэг шулуун дээр оршихыг Менелайн теоремоор батлах боломжтой юм байна.

Бодлогоо бодох ямар нэг арга зам харсан л бол яваад үзэх хэрэгтэй. Будагдсан гурвалжныхаа тэмдэглэгээгүй орой болох DI, EF-н огтлолцлын цэгийг L-ээр тэмдэглье. Зорилго маань

$$\frac{DP}{PM} \cdot \frac{MN}{NL} \cdot \frac{LH}{DH} = 1$$

гэж харуулахтай эквивалент. Харахад олон тодорхойгүй хэрчмийн уртууд байгаа мэт боловч $DP = PM$ гэдгийг санавал зорилго болох

P, N, H нэг шулуун дээр оршино гэж батал

гэдгийг

$$\frac{MN}{NL} = \frac{DH}{LH} \text{ гэж харуул} \quad (*)$$

гэсэн шинэ зорилгоор сольж чадна. $(*)$-ийн хамгийн том давуу тал нь бид P цэгээс ангижирлаа, P цэгийн DM-ийн дундаж гэдэг нь $DP = PM$ гэдэгт аль хэдийн ашиглагдсан. Гэхдээ $(*)$-ийн сул тал нь бид дөрвийн дөрвөн эвгүй хэрчмийн урт олох хэрэгтэй боллоо.

Шууд эдгээр хэрчмийн уртыг нарийн тооцоолох гэж дайрахын оронд эхлээд хэрчмийн уртуудыг эвтэйхэн тооцоолж чадах эсэхээ бодож үзье (хэрэв чадахгүй бол өөр арга хайна). Үүний тулд эхлээд аль аль уртууд тооцоологдох боломжтойг зургаасаа гүйлгэн харах хэрэгтэй болдог бөгөөд бид зорьж буй дөрвөн хэрчмийн уртыг олохын өмнө өөр олон хэрчмийн урт эхэлж олох ёстой билээ. Бид DEF гурвалжны өнцгүүдийг мэдэж байгаа тул DE, EF, FD-г багтсан тойргийн радиус r-р илэрхийлж чадна. Бидний олохыг хүсэж буй дөрвөн хэрчим ABC биш DEF гурвалжнаас хамааруулж олоход илүү хялбар харагдаж байгаа тул бүх юмаа DE, EF, FD-ээр илэрхийлэхийг зорьё. MN хувьд $MN = FN - FM = \frac{1}{2}EF - FM$ гэдгээс FM уртыг олоход хангалттай бөгөөд $FM = DF \sin \angle MDF$ гэдгийг ашиглан FM олж чадна. Бас BIC гурвалжны тал болон өнцгүүд мэдэгдэж байгаа тул

$$DH = DC \cdot \tan \angle DCH = r \cdot \cot \angle BCI \cdot \tan \angle DCH$$

гэдгээр DH-г олж чадна. Бидэнд NL, LH хоёр л үлдлээ. $NL = \frac{1}{2}EF - EL$ тул NL-ийн оронд илүү эвтэйхэн харагдах EL-г олохыг зорьё. Харин LH хувьд $LH = DH - DL$ тул бид DL-г олоход хангалттай. Эцэст нь EL, DL-г олох боломжтой эсэхийг бодож үзэцгээе. Энэ нь $\triangle EDL$-ийн талууд бөгөөд DE-г мэдэж байгаа тул өнцгүүдийг нь олоход хангалттай (синусын теорем).

$$\angle CDL = 90^\circ,\ \angle CDE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB$$

гэдгээс $\angle EDL = \frac{1}{2}\angle ACB$ гэж гарах ба $\angle DEL = \angle DEF$ мэдэгдэж байгаа. Тэгэхээр $\triangle EDL$-ийн бүх өнцгийг олж чадах тул EL, DL олох боломжтой. Иймд бүх дөрвөн уртаа тооцоолох боломжтой гэж дүгнэе.

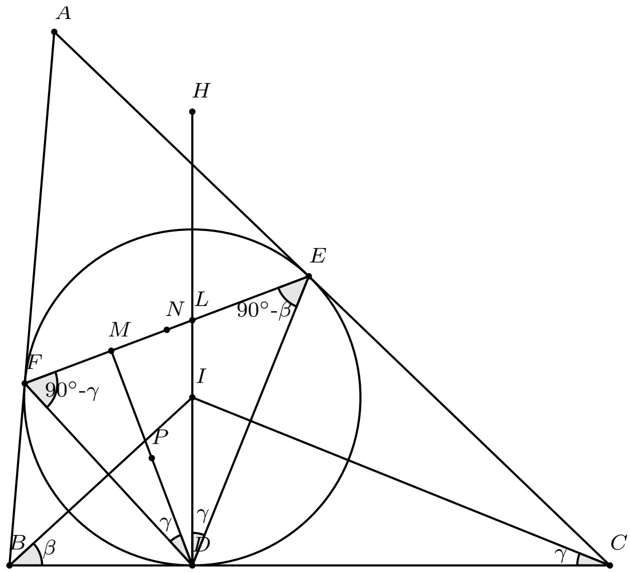
Одоо жинхэнэ тооцоолоо гүйцэтгэе. Энэ шатанд тооцоолол хэр хүндрэлтэй байхаас тооцооллын арга амжилттай болох эсэх нь шийдэгддэг. ABC гурвалжны өнцгүүдийг $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ стандарт тэмдэглэгээгээр биш $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$ гэж тэмдэглэе. Учир нь багтсан тойрог гарч ирэхэд гурвалжны өнцгүүдийн хагасаар бусад өнцгүүд илэрхийлэгддэг. Бид $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ болохыг санах хэрэгтэй. $\angle FAE = 2\alpha$ ба $AF = AE$ тул

$$\angle AFE = \angle AEF = 90^\circ - \alpha = \angle FDE$$

болно. Адилхнаар $\angle DEF = 90^\circ - \beta$, $\angle DFE = 90^\circ - \gamma$ байна. $\angle CDE = 90^\circ - \gamma$ тул $\angle LDE = \gamma$, мөн

$$\angle FDM = 90^\circ - \angle DFE = \gamma$$

байна.



Бид бүх уртуудыг багтсан тойргийн радиус $r = ID$-р илэрхийлж олъё, өөрөөр хэлбэл, бүх уртыг $r\times$ (ямар нэг тригонометр илэрхийлэл) хэлбэртэйгээр олно гэсэн үг. Яагаад гурвалжны талууд биш r-г сонгосон шалтгаан нь:

1. MN, NL, DL, EL уртууд нь бүгд DE, EF, DF-ээс хамаарах ба DE, EF, DF-г универсал хувьсагч болох r-аар илэрхийлэх эвтэйхэн.

2. DH уртыг бид $DH = DC \cdot \tan\angle DCH$ гэж олохоор шийдсэн ба DC нь r-аар эвтэйхэн илэрхийлэгдэнэ.

Одоо синусын өргөтгөсөн теорем ёсоор

$$\frac{DE}{\sin(90^\circ-\gamma)} = \frac{EF}{\sin(90^\circ-\alpha)} = \frac{DF}{\sin(90^\circ-\beta)} = 2r$$

гэдгээс

$$DE = 2r\cos\gamma,\ EF = 2r\cos\alpha,\ DF = 2r\cos\beta$$

гэж олдоно. Тэгэхээр

$$MN = FN - FM = \frac{1}{2}EF - DF\sin\angle MDF = r\cos\beta - 2r\cos\beta\sin\gamma =$$
$$= r(\cos\alpha - 2\sin\gamma\cos\beta)$$

гэж гарна. Бид $\cos\alpha - 2\sin\gamma\cos\beta$ илэрхийллийг хялбарчилъя, ер нь тооцоонд ямар ч илэрхийлэлийг аль болох хялбар хэлбэрт бичих нь чухал. Нийлбэрийг үржвэр, үржвэрийг нийлбэр болгох дараах томъёонууд тригонометр илэрхийлэлтэй ажиллахад асар их тус болдог:

Лемм 3. Дурын u, v-ийн хувьд

i) Нийлбэрийг үржвэр болгох

- $\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$
- $\sin u - \sin v = 2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2}$
- $\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$
- $\cos u - \cos v = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$

ii) Үржвэрийг нийлбэр болгох

- $2\sin u\cos v = \sin(u+v) + \sin(u-v)$
- $2\sin u\sin v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$
- $2\cos u\cos v = \cos(u-v) + \cos(u+v)$

томъёонууд биелнэ.

Дээрх томъёонуудыг ашиглавал

$$\begin{aligned} MN &= r(\cos\alpha - 2\sin\gamma\cos\beta) = r(\cos\alpha - \sin(\gamma+\beta) - \sin(\gamma-\beta)) = \\ &= r(\cos\alpha - \sin(90^\circ - \alpha) + \sin(\beta-\gamma)) = r\sin(\beta-\gamma) \end{aligned} \tag{1}$$

гэж хялбарчлагдана. Өмнө нь төлөвлөснөөрөө DH-г олвол

$$\begin{aligned} DH &= r\cot\angle BCI \cdot \tan\angle DCH = r\cot\gamma\tan(90^\circ - \angle IBC) = \\ &= r\cot\gamma\cot\angle IBC = r\cot\beta\cot\gamma \end{aligned} \tag{2}$$

гэж гарна.

Одоо EL, DL-г олъё. Бид өмнө гаргасан загвараараа дагая. Синусын теоремийг $\triangle DEL$ дээр бичвэл

$$\begin{aligned} DL = DE \cdot \frac{\sin\angle DEL}{\sin\angle DLE} &= 2r\cos\gamma\frac{\sin(90^\circ-\beta)}{\sin(180^\circ-\angle DEL-\angle LDE)} = \\ &= 2r\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin(180^\circ-(90^\circ-\beta)-\gamma)} = 2r\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin(90^\circ+\beta-\gamma)} = 2r\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\beta-\gamma)} \end{aligned}$$

ба

$$EL = DE\frac{\sin\angle LDE}{\sin\angle DLE} = 2r\cos\gamma\frac{\sin\gamma}{\sin(90^\circ+\beta-\gamma)} = 2r\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\cos(\beta-\gamma)}$$

гэж олдоно. Одоо NL, LH-г олцгооё.

$$\begin{aligned} NL = EN - EL &= \frac{1}{2}EF - 2r\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\cos(\beta-\gamma)} = \\ &= r\cos\alpha - 2r\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\cos(\beta-\gamma)} = r\frac{\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)-2\sin\gamma\cos\gamma}{\cos(\beta-\gamma)} \end{aligned}$$

болно. Үүний хүртвэр хуваарийг 2-оор үржүүлж, үржвэрийг нийлбэр болгох томъёогоор $\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)$-г задалвал

$$\begin{aligned} NL &= r\frac{2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)-4\sin\gamma\cos\gamma}{2\cos(\beta-\gamma)} = \\ &= r\frac{\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)-4\sin\gamma\cos\gamma}{2\cos(\beta-\gamma)} = \\ &= r\frac{\cos(90^\circ-2\gamma)+\cos(90^\circ-2\beta)-2\sin 2\gamma}{2\cos(\beta-\gamma)} = \\ &= r\frac{\sin 2\gamma+\sin 2\beta-2\sin 2\gamma}{2\cos(\beta-\gamma)} = r\frac{\sin 2\beta-\sin 2\gamma}{2\cos(\beta-\gamma)} \end{aligned}$$

Энд нийлбэрийг үржвэр болгох томъёо ашиглавал

$$\begin{aligned} NL &= r\frac{\sin 2\beta-\sin 2\gamma}{2\cos(\beta-\gamma)} = r\frac{2\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma)}{2\cos(\beta-\gamma)} = \\ &= r\tan(\beta-\gamma)\cos(90^\circ-\alpha) = r\sin\alpha\tan(\beta-\gamma) \qquad (3) \end{aligned}$$

гэж аятайхан байдлаар олж чадлаа. Эцэст нь LH-г олъё.

$$\begin{aligned}
LH = DH - DL = r\cot\beta\cot\gamma - 2r\frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\beta-\gamma)} =\\
= r\cos\beta\cos\gamma\left(\frac{1}{\sin\beta\sin\gamma} - \frac{2}{\cos(\beta-\gamma)}\right) =\\
= r\cos\beta\cos\gamma\frac{\cos(\beta-\gamma) - 2\sin\beta\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma\cos(\beta-\gamma)} =\\
= r\cos\beta\cos\gamma\frac{\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma\cos(\beta-\gamma)} =\\
= r\cot\beta\cot\gamma\frac{\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma}{\cos(\beta-\gamma)} = r\cot\beta\cot\gamma\frac{\cos(\beta+\gamma)}{\cos(\beta-\gamma)} =\\
= r\cot\beta\cot\gamma\frac{\cos(90^\circ-\alpha)}{\cos(\beta-\gamma)} = r\cot\beta\cot\gamma\frac{\sin\alpha}{\cos(\beta-\gamma)} \qquad (4)
\end{aligned}$$

гэж гарна. Ийнхүү бүх дөрвөн хэрчмийн уртаа олсны дараа $(*)$ биелж буй эсэхийг шалгая.

$$\frac{MN}{NL} \overset{(1),(3)}{=\!=} \frac{r\sin(\beta-\gamma)}{r\sin\alpha\tan(\beta-\gamma)} = \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha\cdot\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos(\beta-\gamma)}} = \frac{\cos(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}$$

ба

$$\frac{DH}{LH} \overset{(2),(4)}{=\!=} \frac{r\cot\beta\cot\gamma}{r\cot\beta\cot\gamma\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos(\beta-\gamma)}} = \frac{\cos(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}$$

гэдгээс манай зорилго $(*)$ биелэгдэж бодлого бодогдлоо. □

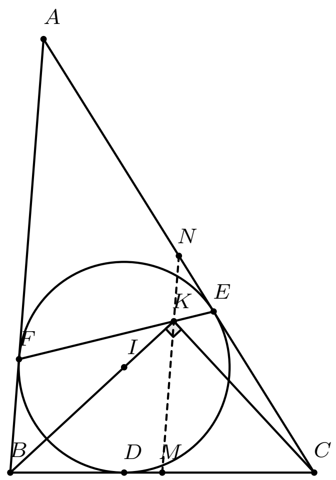
Энэ бодлогын синтетик, тооцооллын бус бодолтыг бид зүгээр уншаад өнгөрье. Үүний өмнө дээрх бодолтыг сайн ажиглавал

1. P цэгээс Менелейн теоремийн туслалцаатайгаар ангижирсан
2. MN, NL, DH, LH хэрчмийн уртууд (азаар) эвтэйхэн илэрхийлэгдсэн

гэсэн хоёр хүчин зүйлийн үндсэн дээр бодолт амжилттай болсон болохыг тэмдэглэе.

Бодолт ▷ (Аналитик бус бодолт) Эхлээд дараах леммийг баталгаагүйгээр ашиглъя.

Лемм 4. ABC гурвалжинд багтсан I төвтэй тойрог BC, CA, AB талуудыг харгалзан D, E, F цэгээр шүргэнэ. BI цацраг EF шулууныг K цэгт огтолдог байг. BC, AC талын дунджууд харгалзан M, N бол M, N, K цэгүүд нэг шулуун дээр орших ба $\angle BKC = 90°$ байна.

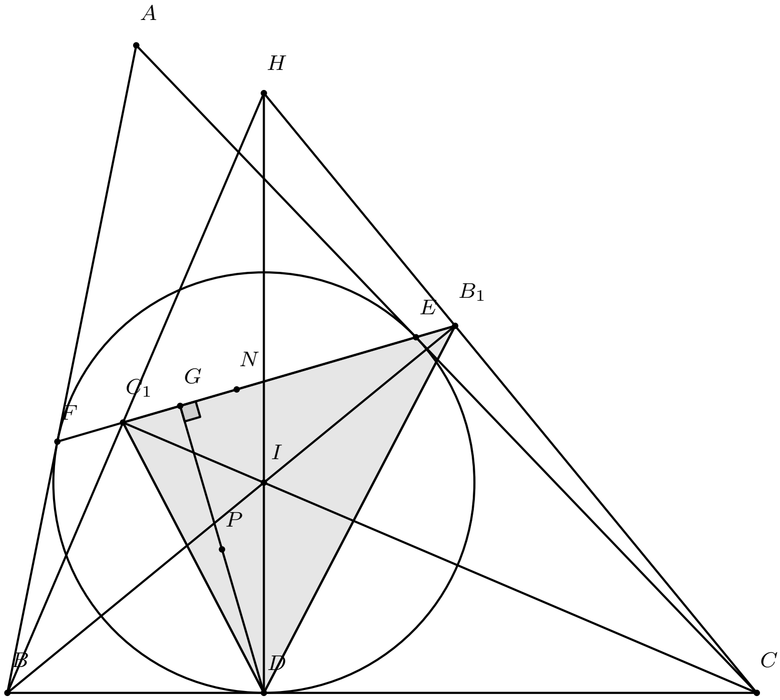


Одоо бодлогынхоо бодолтод оръё.

BI, CI цацрагууд EF шулууныг харгалзан B_1, C_1-ээр огтолно гэе. Мөн EF дундаж N байг. Лемм 4 ёсоор

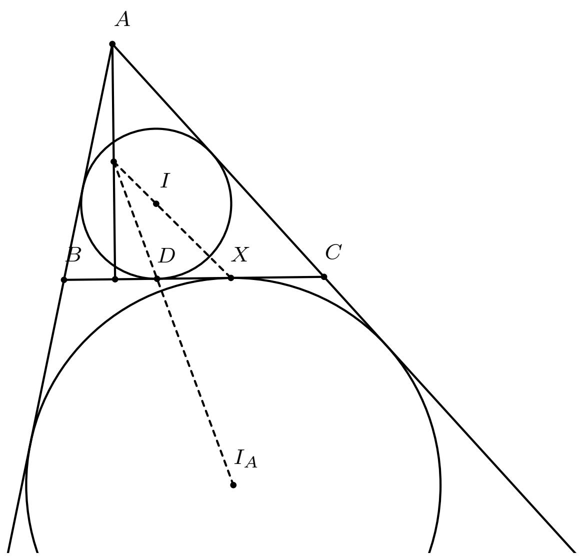
$$\angle BB_1C = \angle BC_1C = 90°$$

гэдгээс B_1, C_1 нь $\triangle BIC$-ийн өндрийн сууриуд болно. Иймд $\triangle HBC$-ийн өндрийн сууриуд D, B_1, C_1 байна гэж гарна. Эндээс $\triangle HBC$-ийн ортотөв I цэг нь $\triangle DB_1C_1$-д багтсан тойргийн төв болно. Иймд $\triangle DB_1C_1$-д багтсан тойрог B_1C_1-г N цэгт шүргэнэ. Мөн $\triangle DB_1C_1$-ийн D оройн эсрэг гадаад багтсан тойргийн төв H болохыг харуулахад хэцүү биш.



Одоо дараах леммээс P, N, H цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж гарна.

Лемм 5. ABC гурвалжинд багтсан I төвтэй тойрог BC-г D цэгт шүргэх ба A оройн эсрэг гэдээд багтсан I_A төвтэй тойрог BC-г X цэгээр шүргэнэ. Тэгвэл DI_A ба XI шулуунууд A-с BC-д буулгасан өндрийн дундаж дээр огтлолцоно.



Үнэхээр энэ леммийг $\triangle DB_1C_1$-ийн хувьд ашиглавал өндрийн дундаж P цэг, багтсан тойргийн шүргэлтийн N цэг ба D оройн эсрэг гадаад багтсан тойргийн төв H цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж гарна. □

Эцэст нь дээрх хоёр бодолтыг харьцуулъя. Хоёр дах бодолт их уран гоё бодолт юм. Гэхдээ энэ бодолтыг олж харах хэцүү. Бид эхлээд Лемм 4-ийг ашиглан $\triangle BIC$-ийн өндрийн суурь EF дээр оршино гэдийг анзаарах хэрэгтэй. Дараа нь $\triangle DB_1C_1$-ийн хувьд Лемм 5-оос бодлого бодогдохыг ажиглах шаардлагатай.

Харин эхний бодолт үүн шиг уран бодолт биш ч гэсэн DML гурвалжны хувьд Менелайн теорем ашиглаж болохыг анзаарах л юм бол шууд тригонометр бичин бодолтыг гүйцэтгэх бүрэн боломжтой. Тооцооллын хэсэг замбараагүй байж болох бөгөөд тухайн хүнээсээ хамаарч хэр хурдан бодогдох нь шийдэгдэнэ. Нийлбэрийг үржвэр, үржвэрийг нийлбэр болгох томъёогоор тригономемир тооцооллын авах цагийг нилээн багасгаж болдог. Зохиогчийн хувьд эхний бодолтыг гүйцэтгэхэд 45 минут болсон ба хоёр дахь бодолт 2 цагаас наашгүй хугацаа шаардана. Мөн ямар хэрчим хялбар илэрхийлэгдэхийг харж чаддаг, хурдан механик тооцоолол гүйцэтгэдэг байх нь туршлагийн асуудал юм. Бэлтгэл сайтай, их туршлагатай байвал энэ бодлогыг эхний бодолтоор гүйцэтгэх магадлал нь өснө. Гол нь бэлтгэл сайн хийх, туршлага хуримтлуулах нь тухайн хүнээс хамаарах үйл явц байхад хоёрдохь синтетик бодолтыг хүн олимпиад дээр хийнэ гэсэн баталгаа байхгүй юм. Нэг үгээр хэлбэл механик тооцооны аргын давуу тал нь бэлтгэл сайн хийсэн хүнд ямар ч бодлогыг тодорхой хэмжээнд бодох баталгаа өгч чадна, харин синтетик бодолт хийнэ гэдэг нь хааяа азаа туршсан хэрэг байдаг (тухайн бодлогоны зүй тогтол, нууцуудыг нь тайлж чадахгүй байж магадгүй шүү дээ).

Зарим бодлогуудын синтетик бодолт илүү давуу талтай байхад зарим бодлогуудын тооцооллын бодолт хийихэд илүү боломжтой байдаг. Геометрийн бодлого бодох энэ хоёр арга аль аль нь давуу болон сул талуудтай. Тухайлбал:

Синтетик бодолт

Давуу талууд:	Сул талууд:
- Бодолтоо бичихэд хялбар - Алдаа гарах магадлал бага - Бодолт хурдан хийгдэх боломжтой	- Бодолт олдох гэж маш удах эсвэл бүр олдохгүй байх ч тохиолдол бий - Бодолт олох гэсээр тооцооллын бодолтоос илүү цаг авах боломжтой

Аналитик бодолт

Давуу талууд:	Сул талууд:
- Хэрэв тооцоолол нь маш хүнд биш л бол баттай бодож чадна - Хааяа синтетик бодолт хийхээс илүү хурдан байдаг	- Тооцоолол нь асар урт байх тохиолдол элбэг - Алдаа гарах магадлалтай - Бодолт хурдан хийгдэх тохиолдол цөөхөн, ихэвчлэн ядаж 1 цаг шаардана

Бодлого бодож байхад аль арга замаар явахаа та өөрөө шийднэ. Хэрэв тооцооллын арга зам их цаг авахааргүй бол хийхэд зүгээр (ялангуяа олимпиад дээр - хэрэв синтетик бодолт олж чадахгүй мөртлөө аналитик бодолт их цаг авахгүй бол хийхэд асуудалгүй). Гэхдээ ямар ч бодлогыг синтетик аргаар эхэлж оролдож үзэх хэрэгтэй. Аналитик аргад "хэт донтож"болохгүй. Ер нь аль нэгийг нь их ашиглаж, нөгөөг нь ашиглахгүй байх нь учир дутагдалтай. Уншигчдад аль аль техникийг сайн эзэмшсэн байхыг зөвлье. Хүнд бодлогуудыг хоёр аргаа хольж ашиглавал хялбар бодогдох тохиолдол олон бий.

Бүлэг 3

Алгебр ба анализ

Алгебр тоонуудыг бүтэцтэй нь судалдаг математикийн салбар бол анализ тоонуудыг хийдэг үйлдэлүүдтэй нь салбар юм. Эдгээр тоонууд бодит эсвэл комплекс тоо байж болохоос гадна вектор, матриц байж болдог бол бүтэц нь талбар, бүлэг, цагариг гэх мэт байж болно. Харин тоонууд хийх үйлдлүүд буюу функцууд нь олон санаанд оромгүй гайхалтай шинж чанараараа математикчдыг байнга гайхшруулж байдаг. Элементар алгебр, анализ хамгийн энгийн тоонууд болох бодит тоонуудыг ашигладаг бөгөөд цөөхөн тооны аксиомтай ч гэсэн энэ нь гайхамшигтай үр дүнгүүд гаргаж чаддаг. Жишээлбэл, миний хамгийн дуртай илэрхийллүүдийн нэг нь

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

юм. Бүтэн квадратуудын урвуунуудын нийлбэрт ямар нэг газраас π гарч ирж байгаа нь сонирхолтой биш гэж үү.

Алгебр, анализ бас математикийн хэрэглээний томоохон хэсэг болдог. Механик, хими, эдийн засаг, электроник, оптимизац гээд олон салбарын асуудлуудыг алгебр болон дифференциал тооллын аргаар шийдэх боломжтой. Алгебр, анализ маш чухал учраас сайн судлагдаж маш олон нээлтүүд нь хийгдсэн. Гэхдээ хааяа гоёмсог үр дүнгүүд гарсаар байгаа.

§3.1 Тэнцэл биш

Олимпиадын тэнцэл бишүүд алгебрийн илэрхийллүүдийг хувирган адилтгал олж харах чадвар шаарддаг. Жишээлбэл, алдарт Кошийн тэнцэл биш (барууны орнуудад АД-ГД[1] тэнцэл биш гэдэг) нь $x^2 + y^2$ илэрхийллээс $2xy$ илэрхийллийг өгдөг (энд утга багасаж буйг санъя). Энэ байдлаар сэтгэвэл тэнцэл бишийн бодлого нь мэддэг тэнцэл бишүүдээ ашиглан БГТ, ЗГТ-н ихээс нь багыг нь гаргаж авдаг тоглоом юм.

Зарим тэнцэл бишүүдийг ижил хуваарь өгөн хаалт задлаад гарсан илэрхийллүүд дээрээ Шур, Мюрхедийн тэнцэл биш ашиглан "муухай" бодох боломжтой. Ялангуяа тэгш хэмтэй, нэгэн зэргийн тэнцэл бишүүд энэ аргаар бараг байнга бодогдоно. Иймээс бид илүү заль, ухаан шаардсан дээрх аргаар аль болох бодогдохооргүй бодлогууд авч үзье.

Бодлого 7. (2018 АНУ) Эерэг бодит a, b, c тоонуудын хувьд $a + b + c = 4\sqrt[3]{abc}$ бол

$$2(ab + bc + ca) + 4\min(a^2, b^2, c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2$$

гэж харуул.

Бодолт $\triangleright$ Эхлээд a, b, c тэгш эрхтэй болохыг анзаарвал $a \geq b \geq c$ гэж үзэж чадна. Ингэснээр $\min(a^2, b^2, c^2)$-г илүү тодорхой c^2-аар сольж байгаа юм. Бидний батлах тэнцэл биш

$$2(ab + bc + ca) + 4c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

буюу

$$2(ab + bc + ca) + 3c^2 \geq a^2 + b^2 \tag{1}$$

болно. Иймд шинэ зорилт болох (1)-ийг баталъя. (1)-г шууд Коши, Коши-Буняковский гэх мэт тэнцэл биш ашиглан батлах бараг боломжгүй мэт санагдаж байна, учир нь (1) бусад тэнцэл бишээс ялгаатай нь хувьсагчдынхаа

[1] АД-ГД нь арифметик дундаж- Геометр дундаж гэдгийн товчлол

хувьд тэгш хэмтэй биш юм байна. Тэгэхээр арай өөр арга хэрэглэх бололтой. Бид (1)-ээс ч илүү өвөрмөц харагдах $a+b+c=4\sqrt[3]{abc}$ гэсэн нөхцөлтэй болохоо санъя. Тэгэхээр энэ бодлого

1. Тэнцэл биш тэгш хэмгүй учраас өвөрмөц арга шаардаж магадгүй

2. Онцгой нөхцөл өгөгдсөн нь хэрхэн хэрэглэх нь тодорхойгүй байгаа

гэсэн хүндрэлүүд үүсгэж байна.

Тэгэхээр хэрхэн зорилгодоо хүрч (1)-ийг батлана гэсэн үг вэ? Бидний мэдэх бүх тэнцэл бишүүд ашиглагдахааргүй харагдаж байгаа ийм нөхцөлд бид (1)-ийн ЗГТ-аас БГТ-ийг хасахад ямар нэг юмны бүтэн квадрат гарна гэж харуулахаар зорихоос өөр аргагүй. Мөн нөхцөл маань илэрхийллийг хувиргахад ашиглагдах боломжтой. Тэгэхээр дараах зорилго тавигдаж болно.

Өгсөн $a+b+c=4\sqrt[3]{abc}$ нөхцөлийг ашиглан

$$2(ab+bc+ca)+3c^2-(a^2+b^2)$$

илэрхийллийг ямар нэг юмны квадрат хэлбэрт бич.

Бид одоо дээрх зорилгыг хэрхэн биелүүлэх талаараа бодож үзье. Өгсөн нөхцөл болон (1)-ийн хоёр талыг анхааралтай ажиглая (нилээн ондоо харагдаж байна шүү дээ). Бид $c=\min(a,b,c)$ гэж үзсэнээр аль хэдийн тэгш хэмээ алдсан. Гэхдээ a, b хоёр тэгш хэмтэй хэвээрээ байгаа ($a \geq b$ гэдгийг мартаж болно, анхнаасаа $a \geq b \geq c$-ийн оронд $c=\min(a,b,c)$ гэж үзсэнээс өөрцгүй). Тэгэхээр бид a, b тэгш хэмтэй гэдгийг ашиглаж магадгүй.

Мөн нэг чухал ажиглалт нь нөхцөл болон тэнцэл биш маань аль аль нь нэгэн төрлийнх юм. Өөрөөр хэлбэл, дурын эерэг бодит k тооны хувьд a, b, c-ийг тус бүрийг нь k тоогоор үржүүлсэн ak, bk, ck тоонуудаар сольвол өгсөн нөхцөл биелсээр байх бөгөөд (1)-д өөрчлөлт орохгүй.

$$a+b+c=4\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow ak+bk+ck=4\sqrt[3]{ak\cdot bk\cdot ck}$$

$$2(ab+bc+ca)+3c^2 \geq a^2+b^2 \Leftrightarrow 2(ak\cdot bk+bk\cdot ck+ck\cdot ak)+3(ck)^2 \geq (ak)^2+(bk)^2$$

Иймд бид k-г ямар ч тоогоор сонгож авч $(a,b,c)-$г (ak,bk,ck)-р солих боломжтой. (1)-д c илүү олон орж байгаа ба a, b хоёр тэгш хэмтэй учраас c-г 1 болговол оновчтой сонголт болж тэнцэл биш маань илүү хялбарчлагдана. Өөрөөр хэлбэл, энэ нь $k=\frac{1}{c}$ гэж сонгож авна гэсэн үг. Ингэснээр (1) нь $a+b+1=4\sqrt[3]{ab}$ байх эерэг a, b тоонуудын хувьд

$$2(ab+a+b)+3 \geq a^2+b^2 \tag{$1'$}$$

гэж харуулах бодлого болж хувирна.

Бид одоо арай хялбар $a+b+1=4\sqrt[3]{ab}$ нөхцөлийг ашиглан $(1')$ тэнцэл бишийг харуулахад хүрлээ.

$$2(ab+a+b)+3-(a^2+b^2)$$

илэрхийллийг ямар нэг юмны квадрат хэлбэрт бичихийг хичээе.

Ийм хоёр хувьсагчийн тэнцэл бишүүд дээр $a+b$, ab авч үзэх нь зөв санаа байдаг, учир нь a, b-ийн хувьд тэгш хэмтэй аливаа илэрхийллийг $a+b$, ab-үүдээр илэрхийлж бичиж болно. Манай нөхцөл нь ab, $a+b$ хоёрыг хамааруулсан байна. Тэгэхээр

$$2(ab+a+b)+3-(a^2+b^2)$$

илэрхийллээ $a+b$, ab-үүдээр хамааруулж бичээд нөхцөлөө ашиглья.

$$\begin{aligned}
2(ab+a+b)+3-(a^2+b^2) &= 2ab+2(a+b)+3-(a+b^2)+2ab= \\
&= 4ab-(a+b)^2+2(a+b)+3= \\
&= 4ab-(4\sqrt[3]{ab}-1)^2+2(4\sqrt[3]{abc}-1)+3= \\
&= 4ab-(16\sqrt[3]{a^2b^2c^2}-8\sqrt[3]{ab}+1)+8\sqrt[3]{ab}-2+3= \\
&= 4ab-16\sqrt[3]{a^2b^2}+16\sqrt{3}ab= \\
&= 4\sqrt[3]{ab}((\sqrt[3]{ab})^2-4\sqrt[3]{ab}+4)
\end{aligned}$$

Одоо $(\sqrt[3]{ab})^2 - 4\sqrt[3]{ab} + 4$ шууд бүтэн квадрат болох нь анзаарагдаж байна. Тэгэхээр

$$2(ab + a + b) + 3 - (a^2 + b^2) = 4\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{ab} - 2)^2$$

гэдгээс $(1')$ батлагдлаа. Эцэст нь тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлөө олъё. Хэрэв $(1')$ тэнцэлдээ хүрч байвал $4\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{ab}-2)^2 = 0$ болох нь илт. a, b эерэг тул $\sqrt[3]{ab} \neq 0$ байна. Тэгэхээр $\sqrt[3]{ab} - 2 = 0$ буюу $ab = 8$ байх ёстой. Энэ нь $ab = 8$ байх дурын эерэг a, b тоонуудын хувьд тэнцэлдээ хүрнэ гэсэн үг үү? Тийм юм шиг санагдаж магадгүй, учир нь бид (1)-ийн

$$\text{БГТ} - \text{ЗГТ} = 4\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{ab} - 2)^2$$

гэж харуулсан билээ. Гэхдээ үүнийг харуулахад нөхцөлөө ашигласан. a, b нь $a+b+1 = 4\sqrt[3]{ab}$ нөхцөлийг хангаж байх ёстой шүү дээ. $ab = 8$ гэдгээс $a+b = 7$ болно. Хялбар тооцооллоор

$$\{a, b\} = \left\{\frac{1}{2}(7 + \sqrt{7}), \frac{1}{2}(7 - \sqrt{7})\right\}$$

гэж олдоно. $c = 1$ гэж авснаа санавал, мөн тэгш хэм ашигласан тул эерэг бодит c тооны хувьд

$$\left(\frac{1}{2}(7 + \sqrt{7})c, \frac{1}{2}(7 - \sqrt{7})c, c\right)$$

үүний сэлгэмлүүд дээр тэнцэл бишийн тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл болно. □

Тэнцэл бишийн бодлогууд олимпиадын математикийн бусад салбартай харьцуулахад туршлага, мэдлэгээр хамгийн их бодогддог бодлогууд бөгөөд ямар ч тэнцэл бишийн бодлого заавал өмнө нь ажилласан туршлага шаардах гээд байдаг хандлагатай. Жишээ нь дээрх бодлого нэгэн төрлийн тэнцэл биш болон тэгш хэмт олон гишүүнтүүд болох $a + b$, ab-ээр бусад олон гишүүнтийг илэрхийлэх гэсэн мэдлэгүүд хэрэгдэгдэж байна. Тэнцэл биш нь бэлтгэл сайн хийсэн хүнд хамгийн том давуу тал өгдөг салбар бөгөөд бараг бүх бодлогыг нь боддог хүчирхэг аргууд сайн хөгжсөн. Ийм шалтгаанаар сүүлийн жилүүдэд тэнцэл биш ОУМО-д тавигддаггүй болоод байгаа.

Бодлого 8. (ELMO 2003) x, y, $z > 1$ бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{y^2-1}+\frac{1}{z^2-1}=1$$

бол

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\leq 1$$

тэнцэл биш биелэхийг батал.

Бодолт $\triangleright$ Бидэнд хамгийн эхэнд анзаарагдах хүндрэл бол амархан ашиглагдахгүй харагдах

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x^2-1}=1$$

нөхцөл юм. Ихэвчлэн хувьсагчдад нөхцөл өгвөл тэр нь $x+y+z=3$ эсвэл $xyz=1$ байдаг. Энэ хоёр нөхцөл ашиглахад хамаагүй хялбар юм. Тэгэхээр бид

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x^2-1}=1$$

нөхцөлийг ямар нэг байдлаар хялбарчлахаар оролдож үзье. Мөн бидэнд өгсөн тэнцэл биш нөхцөлөөс бага зэргийнх байна. Өгөгдөл маань x^2, y^2, z^2-ын хувьд

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x^2-1}=1$$

биелнэ гэсэн бол тэнцэл биш нь x, y, z тоонуудын хувьд

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x+1}\leq 1$$

биелэхийг харуулахыг шаардаж байна. Ихэнхи тохиолдлолд тэнцэл биш маань нөхцөлөөсөө илүү төвөгтэй байдаг. Гэтэл энэ тохиолдолд

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x+1}$$

илүү аятайхан илэрхийлэл байна.

Тэгэхээр бид хүчээр нөхцөлөө хялбарчилж батлах тэнцэтгэл бишээ хялбарчилсан өгөгдлөөрөө баталъя. Өгөгдөл маань гурван юмны нийлбэр 1 гэсэн нөхцөл юм. Иймд

$$a = \frac{1}{x^2-1}, b = \frac{1}{y^2-1}, c = \frac{1}{z^2-1}$$

гэе. Ингэснээр нөхцөлөө a, b, c гэсэн шинэ хувьсагчдын хувьд $a+b+c=1$ гэж бичиж чадна. Одоо x, y, z-ийг харгалзан a, b, c хувьсагчдаас хамааруулж бичээд үүнийгээ $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{y+1}$, $\frac{1}{z+1}$-д орлуулъя. $a = \frac{1}{x^2-1}$ гэдгээс $x^2 = 1 + \frac{1}{a}$ болно. Иймд $x = \sqrt{1+\frac{1}{a}}$ (энд, $x > 1$гэдгийг санаярай) болох ба эндээс

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{a}}}$$

болно. Тэгэхээр бодлого маань

a, b, $c > 0$ тоонуудын хувьд $a+b+c=1$ бол

$$\sum_{cyc} \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{a}}} \leq 1 \tag{1}$$

гэсэн шинэ бодлого руу шилжлээ.

Одоо хэдийгээр (1)-ийн ЗГТ муухай харагдаж байгаа ч ажиллахад хялбар боллоо. (1) маань $f(t) = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{t}}}$ функцийн хувьд $a+b+c=1$ бол $f(a)+f(b)+f(c) \leq 1$ гэж батал гэсэн тэнцэл биш байна. Иймэрхүү хэлбэрийн бодлого руу шилжвэл Иенсений тэнцэл биш хааяа шууд боддог (хэрэв функц маань хотгор эсвэл гүдгэр байвал). Энэ тохиолдолд $f''(t) = -\frac{1}{4}(t(t+1))^{-\frac{3}{2}} < 0$ буюу f гүдгэр, тэгэхээр Иенсений тэнцэл бишээр

$$f(a)+f(b)+f(c) \leq 3f(\frac{a+b+c}{3}) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

гэж гарч бодлого бодогдоно. Гэхдээ энэ бол бага зэрэг хүч ашигласан бодолт юм. Одоо арай элементар аргаар бодож үзье.

Эхлээд $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{a}}}$ гэдгийг хялбарчилъя. Язгуур дор байгаа бутархайг хялбарчилахын тулд хуваариар нь үржүүлье.

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{a}}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}$$

болно. Одоо $\sqrt{a}+\sqrt{a+1}$-г хосмог болох $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$-аар үржүүлвэл 1 гарахыг анзаарвал

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{a}}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})}{(a+1)-a}=\sqrt{a(a+1)}-a$$

гэж бичигдэнэ (анхны $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{a}}}$-г хамаагүй хялбар бичиж чадлаа). Иймд

$$\sum_{cyc}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{a}}}=\sum_{cyc}\sqrt{a(a+1)}-1$$

болох тул бодлого нь

a, b, $c>0$ тоонуудын хувьд $a+b+c=1$ нөхцөл биелэх бол

$$\sum_{cyc}\sqrt{a(a+1)}\leq 2 \qquad (2)$$

гэж харуул гэсэн бодлого руу шилжинэ. Харин (2) бол бидний сайн мэдэх Коши, Коши-Буняковскийн тэнцэл бишүүдээр хялбар бодогдоно. $\sum\limits_{cyc}\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+1}$ гэж бичиж байгаад Коши-Буняковский ашиглавал шууд дээд заагийг өгч байна.

$$\sum_{cyc}\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+1}\leq\sqrt{\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}(a+1)\right)}=\sqrt{1\cdot(1+3)}=2$$

Мөн хоёр талаа 2-р үржүүлээд Коши ашиглан бодож болно.

$$2\sum_{cyc}\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+1}=\sum_{cyc}\sqrt{4a\cdot(a+1)}\leq\sum_{cyc}\frac{5a+1}{2}=\frac{1}{2}\left(5\sum_{cyc}a+3\right)=4$$

■

Тэмдэглэл. Энэ бодлогыг орлуулга ашиглаагүй Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш хэрэглэж дараах байдлаар бодох боломжтой.

Коши-Буняковский хэрэглэвэл:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{1}{x^2-1}\right)\left(\sum_{cyc} \frac{x-1}{x+1}\right) \geq \left(\sum_{cyc} \frac{1}{x+1}\right)^2$$

болох ба

$$S = \sum_{cyc} \frac{1}{x+1}$$

гэвэл $S \geq 0$ тул $1 \cdot (3-2S) \geq S^2$ гэдгээс $S \leq 1$ гэж гарна.

§3.2 Функциональ тэгшитгэл

Функциональ тэгшитгэл бол үл мэдэгч нь функц байдаг тэгшитгэл юм. Олимпиадын түвшинд функциональ тэгшитгэлийн бодлогууд энгийн алгебрийн тэгшитгэл эсвэл чанар хангах бүх функцийг олохыг шаарддаг. Эдгээр бодлогууд миний бодлоор математик сэтгэлгээг хөгжүүлэх сайн арга зам юм. Учир нь ихэвчлэн 1-2 ширхэг өгөгдөл өгөгддөг учраас явах зам нь тодорхой байдаг. Бусад салбарууд хэдэн арван аксиом, олон зуун теоремтой байдагтай харьцуулвал маш цөөхөн өгөгдөл ашиглагддаг учраас ийм "жижиг орон зайд"математик хийж буй санагдана. Гэсэн хэдий ч санаанд оромгүй шийд, ухаалаг бодолтуудаар дүүрэн байдаг.

Эхлээд функцийн шинж чанар болон кошийн функцийн тухай мэдлэгүүдээ давтъя.

$f\colon A \to B$ функц нь ялгаатай утгуудад ялгаатай утгууд харгалзаж байвал инъектив гэнэ. Өөрөөр хэлбэл, a, $a' \in A$ хувьд $f(a) = f(a')$ байвал $a = a'$ гэж гарна.

$f\colon A \to B$ функц нь утгын мужийнхаа бүх утгыг авч чаддаг бол сюръектив гэнэ. Математик хэлээр, дурын $b \in B$ авахад $f(a) = B$ байдаг ядаж нэг $a \in A$ олдоно.

Харин $f\colon A \to B$ функц инъектив бөгөөд сюръектив байвал үүнийг биектив гэнэ. Биектив функц A, B олонлогуудын хооронд $1 : 1$ буулгалт үүсгэнэ. Өөрөөр хэлбэл, дурын $b \in B$ авахад $f(a) = b$ байдаг яг нэг элемент олдоно.

Биектив функц үүсдэг нэг түгээмэл тохиолдол нь $f(f(x)) = x$ байх f функцүүд юм. Эдгээр функцүүд биектив болохын баталгааг уншигчдад үлдээе.

Кошийн функциональ тэгшитгэл нь $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ бөгөөд дурын x, y бодит тоонуудын хувьд

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

нөхцөлийг хангадаг бүх функцыг ол гэсэн бодлого бөгөөд эдгээр функцүүдийг Кошийн функц гэдэг. Аливаа Кошийн f функцийн хувьд дараах чанарууд биелдэг.

i) $f(0) = 0$

ii) f сондгой

iii) $c = f(1)$ гэвэл дурын q рациональ тооны хувьд $f(q) = cq$

Бид iii)-аас $f(x) = cx$ (c тогтмол бодит тоо) гэсэн функцүүд бүх Кошийн функцүүд гэж таамаглахад хүрч байна, учир нь рациональ тоонууд бараг л бүх бодит тоонууд шүү дээ. Даанч энэ таамаглал буруу юм. $f(x) = cx$-ээс өөр маш олон "хачин" Кошийн функцүүд олддог байна. Бидэнд Кошийн f функцийг шугаман гэж батлахын тулд заавал нэмэлт нөхцөл хэрэг болдог. Жишээлбэл Кошийн f функц дараах нөхцөлүүдийн ядаж нэгийг хангаж байвал шугаман функц гэж мөрдөнө.

i) f функц ямар нэг интервал дээр тасралтгүй

ii) f монотон

iii) f эерэг утгууд дээр сөрөг биш утга авна

Тухайн тохиолдолд f мультипликатив буюу $f(xy) = f(x)f(y)$ байвал f шугаман байна. Учир нь аливаа эерэг x тооны хувьд $f(x) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$ юм.

iv) f ямар нэг интервал дээр зааглагдсан (дээрээсээ эсвэл доороосоо)

Гэхдээ хааяа эдгээр нөхцөлүүдийн шаардлагагүйгээр өгсөн тэгшитгэлээс f шугаман гэж харуулах боломжтой байдаг. Бид үүний жишээг бодлого 3.4 дээр харах болно.

Одоо функционал тэгшитгэл бодож эхлэе.

Бодлого 9. (Балкан 2013) Эерэг бодит тоонуудын олонлогийг S гэж тэмдэглэе. Дараах нөхцөлийг хангах бүх $f\colon S^3 \to S$ функцийг ол. Аливаа эерэг бодит x, y, z ба k тоонуудын хувьд

(i) $xf(x, y, z) = zf(z, y, x)$

(ii) $f(x, ky, k^2z) = kf(x, y, z)$

(iii) $f(1, k, k + 1) = k + 1$

биелнэ.

Бодолт ▷ Энэ бодлогын хамгийн гол онцлог шинж нь f функц нэг хувьсагч биш, гурван хувьсагчийн функц байна. Бид иймэрхүү функциональ тэгшитгэлтэй барагтай л бол таарахгүй. Бас ихэвчлэн нэг тэгшитгэл өгдөг бол энэ бодлого тэгшитгэл гэхээсээ илүү нөхцөл гурвыг өгсөн байна.

Тэгэхээр бид тун өвөрмөц бодлоготой тааралдсан учраас бас өвөрмөц бодолт хийх магадлалтай. Хамгийн эхэнд (i), (ii), (iii) нөхцөлүүдийг нухацтай ажиглая.

(iii) нөхцөл шууд f-ийн утгыг өгч байгаа цор ганц нөхцөл байна. Гэхдээ (iii) маш цөөхөн тооны гурвалын утга өгч чадна. Тэгэхээр бид (iii)-г (i), (ii)-той хамт ашиглан бүх гурвалын утгыг олох бололтой. Үүнийг санаж явъя.

(i) нөхцөл x, z хувьсагчдын хувьд тэгш хэмтэй байна. Тэгэхээр бид $f(x,y,z)$ утга мэдэж байвал $f(z,y,x) \overset{(i)}{=} \dfrac{x}{z} f(x,y,z)$ гэдгийг ашиглан $f(z,y,x)$ утгыг ч гэсэн тооцоолох боломжтой. (iii)-аас бид бас $f(k+1,k,1)$-ийн утгыг мэдэж байгаа гэж гарна.

(ii) нөхцөл адилхнаар $f(x,y,z)$ мэдэж байвал дурын k эерэг тооны хувьд $f(x,ky,k^2z)$ олж чадна гэсэн үг (бас эсрэгээрээ $f(x,ky,k^2z)$ мэдэгдэж байвал $f(x,y,z)$ олдоно). Үүний нэг давуу тал нь бид k тоог дураараа сонгож чадна.

Сайн анзаарвал дээрх хоёр ажиглалт нэгэн төрлийн байна. (i) нь (x,y,z) гурвалыг (z,y,x) гурвал болгож хувиргах үйлдэл бол (ii) нь (x,y,z) гурвалыг дурын эерэг k тооны хувьд (x,ky,k^2z) болгож хувиргах үйлдэл байна. Хамгийн чухал инвариант нь үйлдэл хийх бүрд бид функцийнхаа утгыг мэдэж чадна. Учир нь (i), (ii) нь f(хуучин гурвал) ба f(шинэ гурвал)-ийн харьцааг харуулж байгаа тул f(шинэ гурвал) тооцоологдно.

Бидэнд $(1,k,k+1)$ гурвалууд дээрх утгууд байгаа. Уг хоёр үйлдлээр бид гурвалаа өөрчилсөөр бүх S^3-ийн гурвалыг гаргаж чаддаг бол бид бүх S^3-ийн гурвал бүр дээрх функцийн утгыг тооцоолж чадна. Тэгэхээр бид одоо дараах комбинаториклаг зорилго тавъя.

$(1, k, k+1)$ гурвалаас хоёр үйлдлээрээ S^3-ийн бүх гурвалыг гаргаж ав.

Гэхдээ $(1, k, k+1)$-ийн хязгаарлагдмал байдлаас болж энэ зорилго биелэгдэх боломжгүй байх боломж бий. Хэрэв тийм бол бид өөр юм бодож олох болно. Одоохондоо дээрх зорилгыг биелүүлэхээр зүтгэе.

Бид эхлээд хоёр үйлдлээрээ хийж чадах бүх юмаа хийж үзье. Дурын эерэг k аваад $(1, k, k+1)$ дээр хоёр үйлдлээ хийвэл

$$(1, k, k+1) \xrightarrow{\text{(i)}} (k+1, k, 1)$$
$$\forall t \text{ эерэг тооны хувьд } (1, k, k+1) \xrightarrow{\text{(ii)}} (1, kt, (k+1)t^2)$$

Эхний үйлдэл бас л ялгаагүй хязгаарлагдмал $(k+1, k, 1)$ гаргаж авч байгаа бол хоёр дах нь хоёр хувьсагчтай тул арай бага хязгаарлагдсан байна. Хэрэв бид ямар хязгаарлалтгүй болж чадвал бүх S^3-ийн гурвалыг олон гэсэн үг. Үнэхээр $(1, kt, (k+1)t^2)$ гурвал эхний тоо нь 1 гэдгээс өөр илт харагдах хязгаарлалт алга. Магадгүй энэ гурвал $(1, b, c)$, b, $c \in S$ хэлбэртэй бүх гурвал болж чадах юм болов уу? Хэрэв тийм бол бид бүх $(1, b, c)$ гурвал дээрх функцийн утгаа олж, зорилгынхоо өөдөөс том алхам хийх юм. Энэ таамаглал нь аливаа b, c эерэг тоонуудын хувьд

$$\begin{cases} b = kt \\ c = (k+1)t^2 \end{cases}$$

систем эерэг (k, t) эерэг шийдтэй гэдэгтэй эквивалент. $k = \dfrac{b}{t}$ гэдгээр k хувьсагчийг зайлуулвал

$$c = \left(\frac{b}{t} + 1\right) t^2 = t^2 + bt \text{ буюу } t^2 + bt - c = 0$$

квадрат тэгшитгэл үүснэ. Хоёр шийдүүд $-\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2+4c}}{2}$ байх ба эдгээрийн яг нэг нь эерэг байна. Тэгэхээр $t = \dfrac{-b+\sqrt{b^2+4c}}{2}$ гэж авбал $k = \dfrac{b}{t} = \dfrac{2b}{-b+\sqrt{b^2+4c}}$ тооны хувьд $b = kt$, $c = (k+1)t^2$ биелнэ. Энэ нь юу гэсэн үг вэ? гэвэл дурын эерэг b, c тоонуудыг авахад

$$(k, t) = \left(\frac{2b}{-b+\sqrt{b^2+4c}}, \frac{-b+\sqrt{b^2+4c}}{2} \right)$$

гэж сонговол $(1, k, k+1)$ гурвалаас (ii) үйлдлээр $(1, kt, kt^2) = (1, b, c)$ гурвалыг гаргаж авч чадна. Тэгэхээр бид $(1, b, c)$ гурвалуудыг бүгдийг нь гаргаж чадна.

Одоо эндээс S^3-ийн бүх гурвалыг гаргаж авах тийм ч хэцүү биш. Энэ алхмыг урвуугаар нь хийвэл илүү хялбар. Бид дурын a, b, c эерэг тоонуудын хувьд (a, b, c) гурвалыг $k = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$ гэж сонгон, (ii) үйлдлээр

$$(a, bk, ck^2) = (a, \frac{b}{\sqrt{c}}, 1)$$

болгоод, одоо (i) үйлдлээ хийвэл олж чадах $\left(1, \dfrac{b}{\sqrt{c}}, a\right)$ гурвал руу шилжинэ. Үйлдлүүд урвуугаараа хийгдэх боломжтой бол бид тэгэхээр $\left(1, \dfrac{b}{\sqrt{c}}, a\right)$ −аас (a, b, c) гурвалыг гаргаж чадах юм. (i) үйлдэл мэдээж урвуутай (ө.х, шинэ гурвалаас хуучныг нь гаргаж чадна), харин (ii) үйлдлийг (a, b, c) дээр хийж (a, bk, ck^2) гаргаж авсан бол $\dfrac{1}{k}$ тооны хувьд хийвэл

$$(a, bk, ck^2) \xrightarrow{(ii)} \left(a, bk \cdot \frac{1}{k}, ck^2 \cdot \frac{1}{k^2}\right) = (a, b, c)$$

гарна. Тэгэхээр бид $\left(1, \dfrac{b}{\sqrt{c}}, a\right)$ гурвалаас (a, b, c) гурвалыг гаргаж чадна. Ийнхүү зорилго биелэгдэж, S^3-ийн дурын гурвал дээрх функцийн утгыг олж чадахаар боллоо. Одоо функцийнхаа утгыг олъё. Эхлээд бүх $(1, b, c)$ гурвал дээр утгыг олъё (яг өмнөх зорилго биелэгдсэн дараалаар).

$$(k, t) = \left(\frac{2b}{-b+\sqrt{b^2+4c}}, \frac{-b+\sqrt{b^2+4c}}{2} \right)$$

хосын хувьд $f(1,k,k+1)=k+1$ тул

$$\begin{aligned} f(1,b,c) &= f(1,kt,(k+1)t^2) \overset{\text{(ii)}}{=} tf(1,k,k+1) \overset{\text{(iii)}}{=} t(k+1) = \\ &= \frac{-b+\sqrt{b^2+4c}}{2}\left(\frac{2b}{-b+\sqrt{b^2+4c}}+1\right) = \\ &= \frac{-b+\sqrt{b^2+4c}}{2}\cdot\frac{b+\sqrt{b^2+4c}}{-b+\sqrt{b^2+4c}} = \frac{b+\sqrt{b^2+4c}}{2} \end{aligned}$$

гэж олдоно. Эцэст нь, $f(a,b,c)-$ийг $f\left(1,\frac{b}{\sqrt{c}},a\right)$-аар олохоо санавал,

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= \sqrt{c}f\left(a,\frac{b}{\sqrt{c}},1\right) = \sqrt{c}\cdot\frac{1}{a}af(a,\frac{b}{\sqrt{c}},1) = \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \frac{\sqrt{c}}{a}\cdot 1\cdot f\left(1,\frac{b}{\sqrt{c}},a\right) = \frac{\sqrt{c}}{a}\cdot\frac{\frac{b}{\sqrt{c}}+\sqrt{\frac{b^2}{c}+4a}}{2} \end{aligned}$$

гэж гарч, бид f-ийг олж чадлаа.

Энэ үе шатанд бодлогын бодолт бараг дууссан ч нэг дутуу юм бий. Энэ бол олсон функц өгсөн нөхцөлүүдийг биелүүлэх эсэхийг шалгах юм. Хааяа энэ хэсгийг орхисноор оноо хасуулдаг (хичнээн илт байсан ч). Функциональ тэгшитгэл бүгд хоёр чиглэлтэй байдаг, ө.х, "бүх ... байдаг f функцийг ол"гэж байгаа тул "f функц ... байх нь гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь өгсөн ... нөхцөлийг хангана"гэж харуулах ёстой юм. Бид одоогоор зөвхөн гарцаагүйг нь баталсан байгаа. Хүрэлцээтэйг батлах нь олсон функцаа өгсөн нөхцөл (өгсөн тэгшитгэл) хангахыг шалгах юм. Зарим бодлогын шалгах хэсэг илт биш байдаг ч ихэнхи тохиолдолд хялбар байдаг. Энэ бодлого ч мөн адил шалгахад хэцүү биш.

(i) $xf(x,y,z) = x\frac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2x} = z\frac{y+\sqrt{y^2+4zx}}{2z} = zf(z,y,x)$

(ii) $f(x,ky,k^2z) = \frac{ky+\sqrt{(ky)^2+4k^2xz}}{2x} = k\frac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2} = kf(x,y,z)$

(iii) $f(1,k,k+1) = \frac{k+\sqrt{k^2+4(k+1)}}{2} = \frac{k+k+2}{2} = k+1$

байна. ■

Бодлого 10. (АНУ 2002) Аливаа бодит x, y тоонуудын хувьд

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y) \tag{$*$}$$

биелэх бүх $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функцийг ол.

Бодолт $\triangleright$ Бид хамгийн эхэнд бүх хариугаа тааж олохыг хичээе. Ингэснээр олох функцийнхаа талаар мэдлэгтэй болохоос гадна худлаа үр дүн батлах гэж зүтгэхгүй (жишээлбэл, $f(x) = -x$ хариу болох байхад зөвхөн $f(x) = x$, $f(x) = 0$ шийд болно гэж батлах гэж оролдвол бүтэлгүйтэх тавилантай). Бүх хариугаа олсноор бид "...бүгдийг ол"биш "...гэж батал"гэсэн илүү тодорхой зорилготой болох юм.

Ихэнхи функциональ тэгшитгэл шугаман $f(x) = ax + b$ хэлбэртэй шийдтэй байдаг тул эдгээр функцүүд өгсөн тэгшитгэлийг хангах эсэхийг шалган, биелүүлэх a, b тоонуудыг олъё. $(*)$ нь

$$a(x^2 - y^2) + b = x(ax + b) - y(ay + b) = a(x^2 - y^2) + b(x - y)$$

биелэхтэй эквивалент. x, y дурын бодит тоо байж болохыг санавал $b = 0$ байх ёстой гэж гарч байна. Харин $f(x) = ax$ функцүүд бүгд $(*)$ тэгшитгэлийг хангаж байгааг шалгахад хялбар. Тэгэхээр бид одоохондоо $f(x) = ax$ функцүүд өгсөн тэгшитгэлийг хангахыг олж тогтоолоо.

Магадгүй эдгээр функцүүд бодлогын нөхцөлийг хангах бүх функц байх. Өөр түгээмэл шийдүүд болох $\pm x^2$, $\dfrac{1}{x}$, тогтмол $f(x) = c$ функцүүд манай тэгшитгэлийг хангахгүй байна (энд тогтмол функц $c = 0$ үед өгсөн тэгшитгэлийг хангах ч энэ нь шинэ шийд биш: $f(x) = ax$-ийн $a = 0$ үеийн тохиолдол байна).

Тэгэхээр бид

Тогтмол a тооны хувьд $f(x) = ax$ гэж баталъя.

Бид одоо дээрх таамаглалыг батлах эсвэл няцаахын тулд дараагийн алхам болох ажиглалт хийх, хялбар үр дүн гаргах нь зүйтэй. Эхлээд аль болох олон юм алга болгодог $x = y = 0$ орлуулга хийж үзвэл $f(0) = 0f(0) - 0f(0) = 0$ гэж грана. Функциональ тэгшитгэл дээр шинэ үр дүн гарах бүрд өмнөх үр дүнгүүдтэйгээ нийлүүлж, ажиглаж, дүгнэлт хийж байдаг. Тэгэхээр $f(0) = 0$ гэдгийг функцийнхаа утганд 0 орлуулж ашиглая. $x = 0$ гэвэл өгсөн тэгшитгэлээс $f(-y^2) = -yf(y)$ гэж гарна. $y = 0$ гэвэл $f(x^2) = xf(x)$ болно. Энэ хоёр үр дүнгээс аливаа x авахад $-f(x^2) = -xf(x) = f(-x^2)$ буюу $f(x^2) + f(-x^2) = 0$ гэж гарахыг ажиглая. Иймд f сондгой байж магадгүй. Бид үүнийг харуулж чадах болов уу? Оролдож үзье. f сондгой гэж батлах нь аливаа t тооны хувьд $f(-t) = -f(t)$ буюу $f(t) + f(-t) = 0$ гэж батлахтай адил юм. Бидэнд $f(x^2) + f(-x^2) = 0$ гэсэн мэдээлэл байгаа нь бараг адилхан харагдаж байна. Үнэхээр, t, $-t$ ядаж нэг нь сөрөг биш таараа. Тэрийг нь x^2 гэвэл нөгөө нь $-x^2$ б ,олно (ямар нэг бодит x тооны хувьд), тэгэхээр $f(t)+f(-t) = f(x^2)+f(-x^2) = 0$ болно. Иймд f үнэхээр сондгой функц байжээ.

Бид түр амсхийгээд, одоогоор гаргасан бүх үр дүнгүүдээ жагсааж бичье.

$$f(0) = 0, f(x^2) = xf(x), f \text{ сондгой}$$

Надад ингэж цувуулан бичих нь тустай байдаг. Функциональ тэгшитгэл бодож байхад зорилгодоо хүрэх зам олж хараагүй байвал (бид яг одоо $f(x) = ax$ гэдгийг хэрхэн харуулахаа мэдэхгүй байгаа) функц f-ийн талаас аль болох их мэдээлэлтэй болох хэрэгтэй, ө.х, f функцийн чанаруудыг олж харж, батлах нь зорилго руугаа дөхөд тусална. Тэгэхээр бид тэгшитгэлээ олсон гурван үр дүнтэйгээ харьцуулж, шинэ үр дүн гаргахыг хичээе. $(*)$ -ийн зүүн гар талд буй $xf(x)$, $yf(y)$-ийг $f(x^2)$, $f(y^2)$ сольж болохыг анзаарвал $(*)$ нь

$$f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2)$$

буюу

$$f(x^2 - y^2) + f(y^2) = f(x^2) \tag{$**$}$$

гэж бичигдэнэ. Энэ нь Кошийн функцийг санагдуулж байна. Бид f кошийн функц гэж харуулж чадах уу? Дээрх $(**)$ ихэнхи тохиолдолд $f(a)+f(b) = f(a+$

b) биелэхийг харуулж байна. Үнэхээр b ба $a+b$ сөрөг биш бол $b = y^2$, $a+b = x^2$ байх бодит x, y авч олдоно. Иймд $a = x^2 - y^2$ ба $(**)$-аас $f(a) + f(b) = f(a+b)$ болно.

Тэгэхээр Кошийн тэгшитгэл буюу $f(a) + f(b) = f(a+b)$ нь b, $a+b \geq 0$ үед биелэх юм байна. Үүнийг бүх a, b тоонуудын хувьд биелнэ гэж харуулахыг оролдъё. Эхлээд a ба b тэгш хэмтэй тул $a+b \geq 0$ ба a, b тоонуудын ядаж нэг нь сөрөг биш байхад энэ чанар биелнэ (ямар ч бодлого дээр тэгш хэм байвал ашиглаж байх хэрэгтэй). Бодож үзвэл, $a+b \geq 0$ бол a, b тоонуудын ядаж нэг нэг нь сөрөг биш байх нь илт. Тэгэхээр энэ шаардлагагүй нөхцөлийг хасвал $a+b \geq 0$ байх a, b бүрийн хувьд $f(a+b) = f(a) + f(b)$ биелнэ гэж гарна. Одоо $a+b \leq 0$ хувьд батлах үлдлээ. Энд f сондгой гэдгийг ашиглахад хангалттай. $f(a) + f(b) = -(f(-a) + f(-b))$ болох ба $a+b \leq 0$ гэдэг нь $(-a)+(-b) \geq 0$ гэсэн үг учраас

$$f(-a) + f(-b) = f((-a) + (-b)) = f(-(a+b)),$$

иймд

$$f(a) + f(b) = -f(-(a+b)) = f(a+b)$$

болно. Ийнхүү бид f кошийн функц гэж харуулж чадлаа.

Энэ бол зорилго болох тогтмол a тооны хувьд $f(x) = ax$ гэж харуулахад хүрэхэд хийсэн хамгийн том алхам боллоо. Учир нь Кошийн функц $f(x) = xf(1)$ байдаг (энд $f(x) = ax$ бол $a = f(1)$ учраас $f(x) = xf(1)$ болохыг тэмдэглэе) эсвэл олимпиад дээр бараг ирж байгаагүй муухай функц байдаг билээ. Бид өмнө дурдсан нэмэлт нөхцөлүүдээс аль нэгийг нь харуулахад л бодлого бодогдоно. Тэгэхээр f ямар нэг интервал дээр тасралтгүй, зааглагдсан, монотон гэдгийн аль боломжтойг нь харуулахыг зоръё.

Эхлээд тасралтгүйн талаар бодож үзье. Бодлого өөрөө тасралтгүй нөхцөлийг өгөөгүй тохиолдолд бид өөрсдөө үүнийг батлана гэж хэцүү, бараг байдаггүй.Тэгээд ч $f(x^2) = xf(x)$, f сондгой, $f(0) = 0$ мэтийн нөхцөлүүд хамаагүй боломжтой арга зам нь f зааглагдсан гэж батлах юм (ямар нэг интервал дээр).

Даанч, энэ ч гэсэн хэцүү. f функцийн талаар бидний мэдэж буй нэмэлт нөхцөл болох $(*)$, $f(x^2) = xf(x)$, $f(0) = 0$ ба f сондгой нь тэнцэл биш гаргаж авахааргүй л харагдаж байна.

Тэгэхээр бид одоо юу хийх вэ? Ямар ч байсан f функцийн талаар мэдэж буй үр дүнгүүдээ болъё. f кошийн, $f(x^2) = xf(x)$ ба f функц $(*)$-ийг хангана. Гэвч $(*)$ нь эхний хоёроос мөрдөнө гэдгийг анзааръя.

$$f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2) = xf(x) - yf(y).$$

Иймд бид

f кошийн, $f(x^2) = xf(x)$ байх бүх $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функцийг ол.

гэсэн эквивалент бодлого бодож байна гэж үзэж болно.

Бодлогоо ийнхүү шинээр томъёолсон нь илүү цэгцтэй болохоос гадна бидэнд чиглэл өгч байна. Бидний таамаглал $f(x) = xf(1)$ үнэн л юм бол $f(x^2) = xf(x)$ нөхцөл f шугаман гэж гаргах ёстой. Одоогоор энэ нөхцөлийг сайн судлаагүй байгаа. Тэгэхээр үүнийг f кошийн гэдэгтэй холино, үр дүн гаргаж авцгаая. Дурын бодит x, y тоонуудыг аваад

$$f((x+y)^2) = f(x+y)f(x+y)$$

гэдгийг x, y-ээр задалж үзэцгээе. f кошийн тул

$$f((x+y)^2) = f(x^2 + 2xy + y^2) = f(x^2) + 2f(xy) + f(y^2),$$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ гэж олдох тул

$$\begin{aligned} f(x^2) + 2f(xy) + f(y^2) &= (x+y)(f(x)+f(y)) = \\ &= xf(x) + yf(y) + xf(y) + yf(x) = \\ &= f(x^2) + f(y^2) + (xf(y) + yf(x)) \end{aligned}$$

болно, иймд

$$2f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

биелнэ. Энэ нь шив шинэ үр дүн юм, үүнээс юм гаргахаар оролдъё. $y = 1$ гэж авбал $2f(x) = xf(1) + f(x)$ гэдгээс $f(x) = xf(1)$ гэж гарч, бодлого бодогдлоо.

Дээрх бодолтон дээр "юу болоод өнгөрснийг" товч дурдвал:

- Эхлээд хялбар орлуулга хийж $f(0) = 0$, $f(x^2) = xf(x)$ ба f сондгой гэж харуулсан
- Дээрх үр дүнгүүд ба өгсөн тэгшитгэлээс f кошийн функц гэж харуулсан
- Бид $f(x^2) = xf(x)$ байдаг бүх кошийн f функцийг олоход хүрсэн. Үүнийг $f(x^2) = xf(x)$ нөхцөлийн x-д $x + y$ орлуулах замаар гүйцэтгэсэн.

Бодлого 11. (IMO Shortlist 2016) Аливаа x, $y \in (0, +\infty)$ хувьд

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2)))$$

биелэх бүх $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ функцийг ол.

Бодолт ▷ Энэ тэгшитгэлийг анх хараад л ямар олон f бэ гэсэн сэтгэгдэл төрнө. Мөн тэгшитгэл маш өвөрмөц нэмэгдэхүүнүүдтэй байна, жишээлбэл $f(xy)f(f(x^2))$. Бас нэг онцгой өгөгдөл нь $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ буюу f эерэгээс эерэг рүү буу-на гэсэн нөхцөл юм. Энэ нь давуу ба сул талуудтай. Сул тал нь бид x, y-г 0 гэж авч чадахгүй, харин давуу тал нь f нь 0 утга авахгүй учраас f(ямар нэг юм)$\times$(ямар нэг илэрхийлэл) $= 0$ гэж баталвал шууд тэр (ямар нэг илэрхийлэл) нь 0-тэй тэнцэнэ. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ байсан бол f(ямар нэг юм) $= 0$ тохиолдлыг бодох хэрэгтэй.

Эхлээд шийдийг нь таах гэж үзье. Ихэнхи тэгшитгэлийн шийд болдог $f(x) = x$ функц энэ тохиолдолд шийд болохгүй байна. Тэгэхээр $f(x) = ax + b$ шугаман функц шийд болох эсэхийг шалгаж үзье.

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = x(ax^2 + b)(a(ay + b) + b) + ay(ax + b) + b =$$
$$= x(ax^2 + b)(a^2y + (a + 1)b) + a^2xy + ayb + b$$

ба

$$f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2))) = (axy + b)(a(ax^2 + b) + b + a(ay^2 + b) + b) =$$
$$= (axy + b)(a^2(a^2 + y^2) + 2(a + 1)b)$$

болно. Энэ хоёр аливаа x, y тоонуудын хувьд тэнцэх нь олон гишүүнтээрээ тэнцэхтэй эквивалент.

Бид нарийн задалж коэффициентийг нь тулгаж болох ч гэсэн арай товчоор нэг талд нь байгаа, нөгөө талд нь байхгүй зэргүүдийг авч, a, b-ын хувьд нөхцөл (ө.х, хязгаарлалт) гаргаж авъя. Эхлээд сул коэффициентийн нь харьцуулвал $b = 2(a + 1)b^2$ буюу $b = 0$ эсвэл $(a + 1)b = \frac{1}{2}$ болно. Дараа нь x-ийн өмнөх коэффициентийг авч үзвэл $(a + 1)b^2 = 0$ гэж гарна. Үнэхээр $(axy + b)(a^2(a^2 + y^2) + 2(a + 1)b)$-д x^1y^0 гишүүн байхгүй. Тэгэхээр $b = 0$ эсвэл $a + 1 = 0$. Хэрэв $b \neq 0$ гэвэл $(a+1)b = \dfrac{1}{2}$ ба $a+1 = 0$ гэдэг нь зөрчилд хүрнэ. Иймд $b = 0$ бөгөөд, $f(x) = ax$ болж шалгах ажил хялбарчлагдлаа. Энэ үед

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = a^3x^3y + a^2xy$$

ба

$$f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2))) = a^3x^3y + a^3xy^3$$

нь тэнцэнэ гэдгээс $a = 0$ байх болж зөрчил үүслээ. Өөрөөр хэлбэл, шугаман $f(x) = ax + b$ шийд олдохгүй. Тэгэхээр шугаман шийдгүй бол шийд нь түгээмэл бус, бүр санаанд оромгүй галзуу шийд байж магад. Хувийн туршлагаас хуваалцахад

$$f(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4 \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases} + c_5 \begin{cases} 0, x \text{ тэгш} \\ 1, x \text{ сондгой} \end{cases} + \\ + c_6 \begin{cases} 0, x \text{ 3-т хуваагдана} \\ 1, x \text{ 3-т хуваагдахгүй} \end{cases}$$

(c_1, c_2, …, c_6 дурын тогтмол тоо) гэсэн $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ шийдтэй тэгшитгэл байдаг. Иймд ямар ч өвөрмөц шийдтэй таарахад бэлэн байх хэрэгтэй. Бид одоо шийдээ таахаас илүүтэйгээр судалж үзье. Өөрөөр хэлбэл, f функцийг олох алхмуудаа хийж эхлэе. Тэгээд олсон чанаруудаасаа зөв таах магадлалтай.

Хамгийн эхэнд аль болох олон юм алга болгодог орлуулгууд хийвэл зүгээр байдаг. Энэ бодлого дээр x, $y-$г 0 гэж авч чадахгүй тул $x = y = 1$ гэж авч үзье. Тэгвэл

$$f(1)f(f(1)) + f(f(1)) = 2f(1)f(f(1))$$

буюу $f(f(1)) = f(1)f(f(1))$ болно. $f(f(1)) > 0$ тул $f(1) = 1$ гэж гарна. Ямар ч байсан нэг утга оллоо. Одоо өгсөн тэгшитгэлдээ $x = 1$, y дурын болон $y = 1$, x дурын гэж тус тус орлуулъя.

$$x = 1 \text{ үед } f(f(y)) + f(y) = f(y) + f(y)f(f(y^2))$$
$$y = 1 \text{ үед } xf(x^2) + f(f(x)) = f(x) + f(x)f(f(x^2))$$

Эхнийхээс

$$f(f(y)) = f(y)f(f(y^2)) \tag{1}$$

гэж гарна. Хоёр дах адилтгалл (1)-г ашиглавал

$$f(x) = xf(x^2) \tag{2}$$

болно. Бид $f(1) = 1$ гэдгээ шууд ашиглаад ямар ч байсан хоёр үр дүнтэй боллоо.

(2)-г ашиглаад бид өгсөн тэгшитгэлийнхээ $xf(x^2)f(f(y))$ нэмэгдэхүүнийг арай хялбар $f(x)f(f(y))$-ээр сольж болно. (1) ашиглан бид $f(f(x^2))$, $f(f(y^2))$-ийг харгалзан $\frac{f(f(x))}{f(x)}$, $\frac{f(f(y))}{f(y)}$ сольж чадна. Энэ нь бутархай оруулж байгаа ч гэсэн $f(f(x^2))$ гэсэн барьцгүй юмыг арай барьцтай $f(x)$, $f(f(x))$-ээр илэрхийлж буй давуу талтай тул үүнийг хийвэл өгсөн тэгшитгэл дурын x, y эерэг тоонуудын хувьд

$$f(x)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)\left(\frac{f(f(x))}{f(x)} + \frac{f(f(y))}{f(y)}\right)$$

болно.

Манай тэгшитгэл тийм ч хялбар болсонгүй. Өмнөх бодлогоны хувьд тэгшитгэлээ нэг өөрчилж үзэхэд шууд $f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2)$ гэсэн бараг Кошийн тэгшитгэл үүссэн. Даанч энэ бодлого тийм амар биш бололтой. Дээр нь нэмэхэд бид f-ийг ямар функц гэдгийг мэдэхгүй байдаг.

Ийм тохиолдолд нэмэлт ажиглалт хийж, үр дүн гаргаж авахаар оролдъё. Бид тэгшитгэлдээ $x = y = 1$, $x = 1$, $y = 1$ гэсэн орлуулгууд л хийсэн. Магадгүй дахиж орлуулах хэрэгтэй байх. Манай тэгшитгэл даанч гоё орлуулга хийхэд хэцүү юм. Хоёр хувьсагчаа тэнцүүлж үзье.

$y = x$ гэвэл

$$f(x)f(f(x)) + f(xf(x)) = 2f(x^2) \cdot \frac{f(f(x))}{f(x)}$$

Бид $f(x^2)$-г $\frac{f(x)}{x}$-ээр сольвол ((2)-ийг ашиглан)

$$f(x)f(f(x)) + f(xf(x)) = 2\frac{f(f(x))}{x}$$

болно. Энэ тэгшитгэл ч гэсэн барьцгүй, үр дүн мөрдөж гарахааргүй харагдаж байна. Өөрөөр яаж орлуулах вэ? Бид $y = \frac{1}{x}$ гэж аван $f(xy)$-г 1 болгож болох ч $f\left(\frac{f(x)}{x})\right)$, $f\left(f\left((\frac{1}{x}\right)\right)$ гээд барьцгүй нэмэгдэхүүн гарч ирээд байна. Ер нь эвтэйхэн орлуулга хийх найдлагагүй бололтой.

Бид f-ийн чанаруудаас гаргасан учраас одоо таах гэж оролдъё. Ингэж орлуулга хийж чадахгүй болтлоо мухардвал ядаж f юу байх ёстойг мэдэж байвал тустай. (2)-ийн $f(x) = xf(x^2)$ бидэнд буй хамгийн энгийн үр дүн байна. $f(x^2)$ нь $f(x)-$ээс нэг зэргээр илүү мэт санагдана (бараг бүх тэгшитгэл $f(x) = x$

шийдтэй байдаг). Гэтэл $f(x) = xf(x^2)$ гэхээр $f(x)$ нь $f(x^2)$-аас x-ийн нэг зэргээр илүү ч юм шиг. Их зэрэгт бага зэрэг харгалзаж байна гэхээр $f(x) = \frac{1}{x}$ юм биш үү? Шалгаж үзье :

$$\begin{aligned} xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) &= x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{f(y)} + \frac{1}{yf(x)} = \\ &= \frac{1}{x} \cdot y + \frac{x}{y} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \end{aligned}$$

ба

$$\begin{aligned} f(xy)\left(f(f(x^2)) + f(f(y^2))\right) &= \frac{1}{xy}\left(\frac{1}{f(x^2)} + \frac{1}{f(y^2)}\right) = \\ &= \frac{1}{xy}(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

бөгөөд мэдээж $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ үнэн. Тэгэхээр $f(x) = \frac{1}{x}$ шийд болох юм байна. Мөн энэ функц эергээс ерэг рүү буух бөгөөд тэг дээр тодорхойлогдохгүй. $f\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ гэдэг нь их учиртай байжээ.

Одоо бид өөр шийд байхгүй гэж найдаад $f(x) = \frac{1}{x}$ болохыг батлахыг зоръё. Бидэнд байгаа үр дүнгүүд болох $f(1) = 1$, $f(x) = xf(x^2)$, $f(f(y)) = f(y)f(f(y^2))$ ба өөрчилсөн тэгшитгэл

$$f(x)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)\left(\frac{f(f(x))}{f(x)} + \frac{f(f(y))}{f(y)}\right)$$

сайн ажиглъя. x-д утга орлуулахад дээрх тэгшитгэл x-ийн оронд бараг дан $f(x)$-ээс хамаарч байна. Өөрөөр хэлбэл, x хэд ч байсан хамаагүй $f(x)$-ийн утга $f(x)f(f(y))$, $f(yf(x))$ ба $\frac{f(f(x))}{f(x)}$-ийн утгыг тодорхойлно. Харин $f(xy)$ нь $y \neq 1$ бол шууд $f(x)$-ээр тодорхойлогдохгүй (y тогтмол гэж үзье). Энэ юу гэсэн үг вэ? гэвэл ялгаатай u, v тоонуудын хувьд $f(u) = f(v)$ байвал тэгшитгэлдээ $x = u$, $x = v$ гэж авахад $f(x)f(f(y)) + f(yf(x))$ болон $\frac{f(f(x))}{f(x)} + \frac{f(f(y))}{f(y)}$ тогтмол байх юм. Тэгэхээр

$$\begin{aligned} f(u)f(f(y)) + f(yf(u)) &= f(uy)\left(\frac{f(f(u))}{f(u)} + \frac{f(f(y))}{f(y)}\right) \\ f(v)f(f(y)) + f(yf(v)) &= f(vy)\left(\frac{f(f(v))}{f(v)} + \frac{f(f(y))}{f(y)}\right) \end{aligned}$$

учраас $f(uy) = f(vy)$ болно. Энэ их хүчтэй үр дүн байна. Магадгүй $f(u) = f(v)$ байх $u \neq v$ олдохгүй, өөрөөр хэлбэл f инъектив юм болов уу? Үүнийг батлахыг оролдоод үзье, угаасаа $f(x) = \dfrac{1}{x}$ хариу маань инъектив учраас үнэн байх ёстой (өөр шийд байхгүй бол). Дурын $y > 0$ хувьд $f(uy) = f(vy)$ биелнэ гэдгийг $r = \dfrac{u}{v} \neq 1$ хувьд дурын $x > 0 : f(x) = f(rx)$ гэж илүү эвтэйхэн бичье ($y = \dfrac{x}{v}$ гэж авахад мөрдөнө). Тэгэхээр бид дурын тоо x аваад $r-$аар үржүүлэхэд f өөрчлөгдөхгүй. Энэ r-аар үржүүлэх үйлдлийг хэд ч хийж болно, ө.х, $f(x) = f(rx) = f(r^2x) = \ldots$ байх юм. Ялгаагүй, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{r}\right) = f\left(\dfrac{x}{r^2}\right) = \ldots$ байна.

Одоо тэгшитгэл, (1), (2)-д үүнийг хэрхэн ашиглаж зөрчил үүсгэх талаар бодъё. Ингэж чадвал f инъектив гэдэг нь батлагдана. Гол санаа нь x, y-ийг r-аар үрүүлэх юм. Хараад л (2) үүнд сайн тохирно гэдэг нь илт, учир нь дан x орсон байна

$$f(x) = xf(x^2)$$

Энд $x-$д rx орлуулвал $f(rx) = rxf(r^2x^2)$ болно. $f(rx) = f(x)$ ба $f(r^2x^2) = f(x^2)$ тул $f(x) = rxf(x^2) = xf(x^2)$ гэдгээс $r = 1$ болж зөрчил үүснэ. Ийнхүү f инъектив болохыг баталлаа.

Одоо үүнийгээ хэрхэн ашиглах вэ? Мэдээж f(ядаж нэг юм) $=$ f(өөр нэг юм) болгох хэрэгтэй. Манай өгсөн тэгшитгэл хэцүү харагдаж байна, тэгэхээр (1), (2)-г сайн анхааръя. Тэгвэл (1), (2) аль аль нь $f(t) = tf(s)$ хэлбэртэй болохыг анзаарна. Үүнийг $f(s) = \dfrac{f(t)}{t}$ гэж бичвэл

$$\text{(1) нь } f(f(y^2)) = \frac{f(f(y))}{f(y)}$$

$$\text{(2) нь } f(f(x^2)) = \frac{f(x)}{x}$$

илүү тодорхой боллоо. Бид $\dfrac{f(x)}{x}$ ба $\dfrac{f(f(y))}{f(y)}$ тэнцүү болговол $f(f(y^2)) = f(x^2)$ болно. Харин үүнийг $x = f(y)$ гэж авснаар шийдэж чадна. Тэгэхээр, цэгцтэй бичвэл

$$f(f(y)^2) \overset{(2)}{=} \frac{f(f(y))}{f(y)} \overset{(1)}{=} f(f(y^2))$$

болох буюу $f(y^2) = f(y)^2$ гэж гарна (дурын эерэг y тооны хувьд). Одоо $f(y^2)$, $f(y)$ холбосон өөр томъёо бий билүү? Бид $f(y^2)$-г хялбарчлах (2) гаргаж авснаа санавал $f(y)^2 = f(y^2) \overset{(2)}{=} \dfrac{f(y)}{y}$ гэдгээс $f(y) = \dfrac{1}{y}$ гэж гарна. Ийнхүү $f(x) = \dfrac{1}{x}$ гэж батлах зорилго биелэгдэж бодлого бодогдлоо.

Дээрх бодолтын f инъектив гэж баталсан нь гол үр дүн болсон бөгөөд бодолтын томоохон хэсэг юм. Зарим бодлого гол үр гэхгүйгээр олон жижиг алхамтай байдаг байхад бодолтын ихэнхи хэсэг болдог гол үр дүнтэй бодлогууд дээр гол үр дүнг олж харах чухал юм. Дээрхи бодлого дээр бараг бүх юм $f(x)$-ээс хамаарч байгааг анзаарснаар бид гол үр дүнг олж харан, энэ ажиглалт функциональ тэгшитгэл дээр f инъектив гэж гаргадаг хамгийн түгээмэл аргуудын нэг юм.

Бодлого 12. (IMO 2015) Бодит тоон олонлогийг $\mathbb{R}$ гэж тэмдэглье. Аливаа бодит x, y хувьд

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

биелэх бүх $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функцуудыг ол.

Бодолт $\triangleright$ Тэгшитгэл маань өмнөх бодлогыг бодвол арай цэгцтэй харагдаж байна. Бас $f(x) = x$ шийд болох нь шууд анзаарагдана. Гэхдээ өөр шийд байх боломжтой учраас эхлээд эхлээд бүх шугаман $f(x) = ax + b$ хэлбэртэй шийдүүдийг олж тогтооё. Хялбар тооцоо хийвэл

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

гэдэг нь

$$a(a + 1)x + a^2y + axy + (a + 2)b = (a + 1)x + (a + b)y + axy + b$$

биелэхтэй эквивалент. Энэ тэгшитгэл харгалзах коеффициентүүд нь тэнцэж байж л дурын x, y хувьд биелнэ :

$$\begin{cases} a(a+1) = a + 1 \\ a^2 = a + b \\ (a+2)b = b \end{cases}$$

Тэгэхээр $f(x) = ax + b$ функц өгсөн тэгшитгэлийг хангах нь дээрх системтэй эквивалент юм. Хялбар тооцоогоор $(a, b) = (1, 0); (-1, 2)$ гэсэн хосууд олдож, $f(x) = x$ ба $f(x) = 2 - x$ функцууд өгсөн тэгшитгэлийг хангана гэж гарна.

Бид болгоомжлон бүх шугаман функцуудыг шалгаснаар нэг санаанд оромгүй шийд байсныг мэдэж авлаа. Хэрэв $f(x) = 2 - x$ шийд гэдгийг мэдээгүй байсан бол $f(x) = x$ цорын ганц шийд гэдэг худлаа үр дүн батлах гэж оролдон бүтэлгүйтэх хувь заяатай байжээ. Одоо энэ хоёроос өөр шийд байхгүй гэж батлахыг зорьё.

Эхлээд юуны өмнө хамгийн энгийн олон юм байхгүй болгодог $x = y = 0$ орлуулга хийгээд юу болохыг харцгаая. Эндээс $f(f(0)) + f(0) = f(0)$ буюу $f(f(0)) = 0$ гэж гарна. Өмнөх хоёр бодлого дээр $x = y = 0$ орлуулгаар $f(0) = 0$ гэж гарч байсан ч энэ удаа тэгж гарсангүй. Бага зэрэг урам хугармаар санагдаж байвч угаасаа $f(x) = 2 - x$ функцын хувьд $f(0) = 2 \neq 0$ шүү дээ. Тэгэхээр бид $f(0) = 0$ гэдэг худлаа үр дүн гаргаж авч чадахгүй юм. Харин $f(x) = 2 - x$ хувьд $f(f(0)) = f(2) = 0$ ялгаагүй биелж байна. Тэгэхээр бид сайндаа $f(f(0)) = 0$ гэж гаргаж авч байгаа нь аргагүй, бид одоохондоо $f(x) = x$ ба $f(x) = 2 - x$ хувьд зэрэг биелэх үр дүнгүүд л баталж чадна. Ингэхэд бид хэрхэн хоёр өөр шийд гаргаж авах билээ? Өөрөөр хэлбэл, хэрхэн "$f(x) = x$ эсвэл $f(x) = 2 - x$" гэж харуулах вэ? Ихэнхи тохиолдолд үүнийг тохиолдол салган гаргаж авдаг, өөрөөр хэлбэл, эхний тохиолдолд нэг шийд нь гарч ирж хоёрдах тохиолдолд нөгөө шийд нь гарч ирнэ. Бид юугаар тохиолдолд салгахаа мэдэхгүй байгаа тул одоохондоо аль болох их мэдээлэлтэй болохыг хичээе.

Эхлээд x-тэй юмнуудээ алга болгож үзэхийн тулд $x = 0$ гэж орлуулж үзвэл

$$f(f(y)) + f(0) = f(y) + yf(0) \tag{1}$$

гэж гарна. Бид $f(0)$ утгыг мэдэхгүй учраас (1)-ээс шууд үр дүн гаргах хүндрэлтэй, гэхдээ ямар ч байсан y, $f(y)$, $f(f(y))$ гурвыг хамааруулсан томьёотой боллоо. Одоо $y = 0$ гэж авбал

$$f(x + f(x)) + f(0) = x + f(x) \tag{2}$$

гэж гарна. Дээрх тэгшитгэл үл хөдлөх цэгүүдийг санагдуулж байна ($f(t) = t$ байх t цэгийг f функцийн үл хөдлөх цэг гэнэ). Хэрэв $f(0) = 0$ бол аливаа x хувьд $x+f(x)$ үл хөдлөх цэг болох юм байна. Тэгэхээр, бид үл хөдлөх цэгүүдийг судлан үр дүн гаргах магадлалтай. Үүнийг толгойндоо санаж байя.

Бид одоогоор $f(f(0)) = 0$ болон (1), (2)-оос өөр гаргасан үр дүнгүй байна. Одоогоор x, y-ийн аль нэг нь 0, эсвэл хоёулаа 0 гэсэн орлуулгууд хийж үзсэн байгаагаа санавал бид дахиад илүү сайн орлуулгууд хийж нэмэлт амжилтанд хүрнэ. Гэхдээ энэ нь янз бүрийн хамаагүй утга тавиад байх гэсэн үг биш. Ажиглалт хийн, бодож байгаад эвтэйхэн юм гаргаж авах ямар орлуулга байна, тэрийг туршиж үзэх хэрэгтэй. Бас өмнө гаргасан үр дүнгүүдээ өгсөн тэгшитгэлтэйгээ хольж шинэ ололт амжилтанд хүрэх боломжтой. Бид $f(f(0)) = 0$ гэдгийг ямар нэг a хувьд $f(a) = 0$ гэсэн байдлаар ашиглаж болох юм (гэхдээ энэ a зүгээр ч нэг тоо биш, $a = f(0)$ гэдгийг саная). Одоо $f(a) = 0$ гэдгийг хэрхэн ашиглах вэ? Өгсөн тэгшитгэлд a-гаа орлуулж үзэж болох юм. $x = a$ гэж авбал энэ нь зөвхөн $yf(x)$ алга болгох ба $f(a+f(a+y))$ болон $a+f(a+y)$ гэсэн барьцгүй гишүүнүүд үлдэж байна. Ажиглаад байхад, өгсөн тэгшитгэлийн хамгийн хүндрэлтэй хэсэг нь $f(x+f(x+y))$ юм байна, үүний дотор буй $f(x+y)$ утга мэдэгдэхгүйгээс болж f функцын тодорхойгүй аргументээс авсан бүр тодорхойгүй утгатай зууралдаад байна. Иймд $(x+y)$-д $f(x+y)$-ийн утга хэд гарахыг мэдэж байгаа утга орлуулвал эвтэйхэн байж болох юм. Одоогоор зөвхөн a цэг дээрх утга $f(a) = 0$ гэдгийг мэдэж буй тул $x+y = a$ буюу $y = a-x$ гэж орлуулвал

$$f(x+f(a)) + f(ax - x^2) = x + f(a) + (a-x)f(x)$$

буюу

$$f(x) + f((a-x)x) = x + (a-x)f(x) \tag{3}$$

гэж гарна. (3) тэгшитгэл тийм ч аятайхан харагдахгүй байгаа ч гэсэн $x = 0$ гэж авбал x, $(a - x)x$ бүгд цэвэрхэн 0 болж хувирна. Энэ орлуулгаар дээрх тэгшитгэлээс $2f(0) = af(0)$ гэж гарч байна. Одоо $a = f(0)$ гэдгээ санавал $f(0)^2 = 2f(0) \implies f(0) \in \{0, 2\}$ боллоо! Бид үр дүнд хүрч чадлаа, бас одоо $f(0) = 0$, $f(0) = 2$ гэсэн хоёр тохиолдолд хуваасаар бид эхний тохиолдолд $f(x) = x$, дараагийн тохиолдолд $f(x) = 2 - x$ шийд олох боломжтой болох юм.

Тэгэхээр одоо тохиолдол салгацгаая. $f(x) = x$ шийд нь $f(x) = 2 - x$ шийдээс илүү энгийн, бас арай барьцтай учраас эхлээд $f(0) = 0$ тохиолдолыг авч үзье. Өөрөөр хэлбэл, арай хялбар тохиолдоо эхэлж шийдье.

Тохиолдол 1. $f(0) = 0$ гэж үзье.

Үүнийг ашиглан өмнөх олон тэгшитгэлээ хялбарчилж болно. $(1), (2), (3)$ нь $f(0) = 0$ гэдгээс

$$f(f(y)) = f(y) \tag{1'}$$

$$f(x + f(x)) = x + f(x) \tag{2'}$$

$$f(x) + f(-x^2) = x - xf(x) \tag{3'}$$

гэж бичигдэж, үл хөдлөх цэгүүдийг авч үзэхийг дахин санал болгоно : бид өмнө нь үл хөдлөх цэгүүд ашиглаж магадгүй гэж бодож байсан бол одоо дурын x хувьд $f(x)$, $x + f(x)$ үл хөдлөх цэгүүд гэдэг мэдээлэлтэй боллоо. Бас бидний батлахыг зорьж буй $f(x) = x$ гэдэг нь бүх бодит тоо үл хөдлөх цэг болно гэсэн үг юм. Тэгэхээр үл хөдлөх цэгүүдийг судалцгаая.

Гаргасан үр дүнгүүдээ эргэж харвал, бидэнд $f(0) = 0$ ба $(1'), (2'), (3')$ байгаа. Иймд өгсөн тэгшитгэлээ сайн ажиглаж нэмэлт харьцаанууд гаргахыг зорьё, эдгээрээс илүү мэдээлэл агуулж байгаа байлгүй дээ? Өгсөн тэгшитгэл дэх нэмэгдэхүүнүүдийг харах бүрд $f(x+f(x+y))$, $x+f(x+y)$ нь тэнцэх ёстой адилхан тоонууд мэт мэдрэмж төрүүлнэ (угаасаа $f(x) = x$ хувьд энэ хоёр нэмэгдэхүүн тэнцэх ёстой шүү дээ). Бас $f(xy)$, $yf(x)$ төстэй харагдана. Тэгээд манай бодлого нь эдгээр дөрвөн тооны хооронд $f(x+f(x+y))+f(xy) = x+f(x+y)+yf(x)$

хамаарал биелж байгаа гэж хэлж байгаа. Харин хосууд маань хоорондоо хамааралгүй мэт байна : $f(xy)$ ба $x + f(x + y)$ хоёр шал ондоо хэлбэртэй бөгөөд хоорондоо тэнцэхгүй. Тэгэхээр бид "нэг хосыг нь тэнцүүлж чадвал нөгөө нь тэнцэнэ"гэдэг санаанаас өөр сайн зам олохгүй байх магадлалтай. Хэдийгээр $f(x + f(x + y)) = x + f(x + y) \iff f(xy) = yf(x)$ нь өгсөн тэгшитгэлээс илт ч одоогоор өөр зам байхгүй байгаа тул үүнийг цаасан дээр тэмдэглээд авья.

$f(xy) = yf(x)$ байх нь $x + f(x + y)$ үл хөдлөх цэг байхтай эквивалент $(\star)$

Энэ санаа яагаад $x + f(x)$ үл хөдлөх цэг гэдгийг тайлбарлаж байна : $y = 0$ гэж орлуулвал x-с үл хамааран $f(xy) = yf(x)$ биелнэ. Учир нь $xy = 0$ тул $f(xy) = f(0) = 0$ бөгөөд $y = 0$ тул мэдээж $yf(x) = 0$. Эндээс сурж авах юм нь бид x-с үл хамааран $f(xy) = yf(x)$ биелэх y утга орлуулвал шууд $x+f(x+y)$ үл хөдлөх цэг болох юм байна. Өөр ямар y утга энэ чанарыг хангах вэ? Ажиглавал $y = 1$ гэж авч болно : $xy = x$ тул $f(xy) = f(x) = yf(x)$. Иймд дээрх ажиглалтаас (эсвэл зүгээр л өгсөн тэгшитгэлд $y = 1$ гэж орлуулан) $x + f(x + 1)$ үл хөдлөх цэг гэж гарна. Ийнхүү бид нийтдээ 3 үл хөдлөх цэгийн хэлбэр олж илрүүллээ : дурын x хувьд $f(x)$, $x + f(x)$, $x + f(x + 1)$ үл хөдлөх цэг болох юм байна. Бид $(x+1)$-ийг x гэж авснаар (x дурын бодит тоо тул ялгаагүй) үл хөдлөх цэг $x + f(x + 1)$-ийг арай хялбар $x + f(x) - 1$-ээр сольж бичиж болно. Тэгэхээр, ажиглавал, дурын бодит x хувьд $x + f(x)$ болон $x + f(x) - 1$ буюу 1 зөрүүтэй хоёр тоо үл хөдлөх цэгүүд болох ажээ.

Бид одоо цааш юу хийж чадах вэ? Одоогоор $f(0) = 0$, $(3')$ болон $f(x), x + f(x), x+f(x)-1$ үл хөдлөх цэгүүд гэдгээс өөр мэдээлэл гаргаж аваагүй байгаа. Харьцуулахад, $f(x) = x$ гэж харуулах их хол харагдана. Бид өгсөн тэгшитгэлийн өгч байгаа ганц шижүүр болох ($\star$) санааг хөөгөөд үзсэн, нэмээд өгсөн тэгшитгэлээсээ өөр үр дүн гаргах боломжгүй мэт санагдаж байгаа энэ нөхцөлд гаргасан үр дүнгүүдээ эргээд харья. Бидэнд байгаа нэг хачин тэгшитгэл байгаа нь ($3'$) юм. Бас бид $f(0) = 0$ утгыг үл хөдлөх цэгүүддээ орлуулж үзэж болно, дахиад үл хөдлөх цэг гаргаж авч магадгүй шүү дээ. $x = 0$ гэж орлуулвал $x, x + f(x), x + f(x) - 1$ үл хөдлөх цэг гэдгээс $x + f(x) - 1 = -1$ үл хөдлөх цэг гэдгээс л шинэ мэдээлэл гарч байна. Өөрөөр хэлбэл, $f(-1) = -1$ болж, бид дахиад нэг цэг дээрх утга олж чадлаа.

Бид одоо эндээс $f(1)$ утгыг олохыг хичээе, учир нь $f(1)$ хэрэг болох тохиолдол олон байдаг. Өмнө гаргасан үр дүнгүүдээсээ аль нь хэрэг болох вэ? гээд хайгаад үзвэл ($3'$) нүдэнд өртөнө : $f(x)+f(-x^2) = x-xf(x)$ гэдэгт $x = 1$ гэж орлуулвал $f(1) + f(-1) = 1 - f(1)$ буюу $f(1) = 1$ гэж гарна.

Одоо хүрсэн үр дүнгүүдээ цэгцлэн бичье. Бид $f(x), x + f(x), x + f(x) - 1$ үл хөдлөх цэгүүд, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ болон ($3'$) биелнэ гэж гаргасан. Хэрхэн $f(x) = x$ гэж батлах вэ? Зорилгодоо хүрэх хол байгаа бололтой, бидэнд яг хэрхэн байгаа мэдээллүүдээсээ $f(x) = x$ гэж гаргах нь их тодорхойгүй байна. Тэгэхээр бид цааш илүү явж, бидэнд зүг чиг өгөх санаа гартал бодлоготойгоо ажиллах ёстой юм. Бид шууд үр дүн гаргах орлуулгуудаа чадахаараа шавхаад дуусгасан тул одоо хийж болох хоёрдах хамгийн сайн зүйлийг хийе: шууд хэрэг болохгүй ч сэдэл төрүүлж магадгүй орлуулга хийж үзье. Энэ зарчмаар бол $x = 1$ гэж авбал $f(xy) = f(y)$ ба $yf(x) = yf(1) = y$ болох ба энэ хоёр тэнцэх ёстой гэдгийг бид "нууцаар"мэдэж байгаа. Уг орлуулгаар

$$f(1 + f(y + 1)) + f(y) = 1 + f(y + 1) + y \tag{4}$$

боллоо.

Өмнөх ($\star$) санаагаа давтвал (4)-өөс

$$1 + f(y + 1) \text{ үл хөдлөх цэг } \Leftrightarrow y \text{ үл хөдлөх цэг}$$

гэж гарна. Үүнийг (4)-ийн хамт санаж байя.

Одоо цааш хэрхэн урагшилах вэ? Бид $f(xy), yf(x)$-г шууд болон шууд бусаар тэнцүүлэх бүх аргыг туршиж үзсэн, харин $f(x+f(x+y)), x+f(x+y)$-г ямар нэг байдлаар тэнцүүлэх угаасаа хүндрэлтэй. Иймхүү бид гацалтанд орлоо. Гэхдээ гацлаа гээд сандарч эсвэл бууж өгч болохгүй, ямар нэг байдлаар бодолтоо урагшлуулах арга зам заавал байдаг. Жишээ нь, бага эсвэл хялбар тохиолдолуудыг туршиж үзээд бодлогоо мэдрэх (манай бодлого дээр $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ гэж авч үзэж болно, жишээлбэл) хамгийн сайн аргуудын нэг гэж би боддог. Учир нь ингэж оролдох нь бодлогоны бүтцийг ойлгуулж өгдөг бөгөөд тухайн нөхцөл байдлын хүндрэлүүдийг өөр өнцгөөр харахад тустай. Өөрөөр хэлбэл, урд байгаа тэр ханыг бага зэрэг задалж өгдөг гэсэн үг юм.

Гэхдээ яг одоо бид нар энэ тохиолдол болох $f(0) = 0$-той зууралдахын оронд нөгөө тохиолдол болох $f(0) = 2$ оролдож үзье, юмыг яаж мэдэхэв, бодоход илүү хялбар ч юм билүү? Олимпиад дээр цагийн хязгаартай учраас оноо авах боломжтой бүх юмыг цаг дуусахаас өмнө хийгээд үзэх хэрэгтэй шүү дээ.

Тохиолдол 2. $f(0) = 2$ байг.

Эхлээд өмнөх ололтууд маань $f(0) = 2$ бол хэрхэн өөрчлөгдөхийг харья. $f(f(0)) = 0$ гэдгээс $f(2) = 0$ болно. (1) нь $f(f(y)) + 2 = f(y) + 2y$ буюу

$$f(f(y)) = f(y) + 2y - 2 \qquad (1')$$

болж бичигдэнэ. Тэгэхээр $y, f(y), f(f(y))$ гурвын хооронд хамаарал байгаа юм байна. Харин (2) нь

$$f(x + f(x)) + 2 = x + f(x)$$

гэж бичигдэнэ. Одоо (3)-д $f(0) = 2$ гэдгээ орлуулвал

$$f(x) + f(x(2 - x)) = x + (2 - x)f(x)$$

болно, гэхдээ энэ тийм ч эвтэйхэн харагдахгүй л байна.

Дээрх гурван тэгшитгэл хэрэг болж магадгүй ч бидэнд шууд зам зааж өгөхөөр түвшний мэдээллүүд биш байна. Ийнхүү бид өмнөх тохиолдолд тулгарсан бэрхшээлтэйгээ дахин таарлаа : хэрхэн эндээс ”Бүх бодит x хувьд $f(x) = 2 - x$” гэж батлах вэ?, ө.х хэрхэн эцсийнхээ зорилгодоо хүрэх вэ?

Энэ тохиолдолд ямар нэг сэдэл таартлаа бодлоготойгоо ноцолдохоос өөр аргагүй. Тэгэхээр өгсөн тэгшитгэлээ нэг харъя. Тэгшитгэлийн маань $f(x+f(x+y))$, $x + f(x + y)$ болон $f(xy)$, $yf(x)$ гишүүдийг хармагц л "хуучин анд"болох

$$”f(x + f(x + y)) = x + f(x + y) \text{ ба } f(xy) = yf(x) \text{ байх }”$$

гэсэн мэдрэмж салахгүй байгаа нь харамсалтай. Өмнөх тохиолдолтойгоо хэт их ажилласнаас болж энэхүү $f(x) \approx x$ гэсэн интиуц арилаагүй байж болох юм. Гэвч $f(x) = 2 - x$ хувьд энэ биелэх албагүй, ер нь их "ховор"тохиолдолд л $f(x+f(x+y)) = x+f(x+y)$ байна шүү дээ. Учир нь $f(x) = 2-x$ функц цор ганц үл хөдлөх цэгтэй нь $x = 1$ юм. Гэхдээ энэ "буруу"мэдрэмж бид өмнө нь $y = 1$ гэж аваад $f(xy) = yf(x)$ болохыг ашиглаж байсныг сануулна. Анзаарвал, өмнө нь бид "$y = 0$ үед x утгаас үл хамааран $f(xy) = yf(x)$"гэдэг ажиглалт хийж байсан. Гэхдээ энэ өгүүлбэр $f(0) = 0$ үнэн байж л биелнэ. Гэтэл $y = 1$ гэж авахад x утгаас үл хамааран $f(xy) = yf(x)$ биелж байгаа нь $f(0)$ утгаас хамаарахгүй байна, ө.х манай $f(0) = 2$ тохиолдолд ч гэсэн $x + f(x) - 1$ үл хөдлөх цэг байх юм байна шүү дээ! Гэхдээ энэ сэжигтэй биш гэж үү? Манай функц цор ганц үл хөдлөх цэгтэй байх ёстой. Хэрэв бид $x = 1$-с өөр үл хөдлөх цэг байхгүй гэдгийг баталж чадвал эндээс $x + f(x) - 1$ заавал 1-тэй тэнцэх болж, бид $f(x) = 2 - x$ гэж харуулж чадна. Тэгэхээр дараах зорилгыг тавъя :

$1-$с өөр үл хөдлөх цэг байхгүй, ө.х $f(t) = t$ бол $t = 1$ гэж баталъя

Ийнхүү бид ганцхан ажиглалтийн ачаар явах замаа олоод авлаа. Бидний өмнөх тохиолдол дээр хийсэн ажлуудаас нэг нь ерөнхий үр дүн байсан нь аз боллоо. Одоо дээрх зорилтоо хэрхэн гүйцэтгэх талаараа бодоцгооё. Эхлээд гаргасан үр дүнгүүд дотор $f(t) = t$ гэдгийг ашиглаад "гоё"болох ямар юм байна вэ гээд хайвал шууд $(1')$ нүдэнд өртөнө : $f(f(y)) = f(y) + 2y - 2$. Бид өмнө нь $y, f(y), f(f(y))$ гурвын хоёрыг мэдэж байхад гурав дах нь олдоно гэж тэмдэглэл үлдээж байснаа санаая. Гэхдээ t хувьд $t = f(t) = f(f(t))$ шүү дээ! Ийнхүү $y = t$ гэж орлуулвал уг тэгшитгэл t хувьд ганц хувьсагчийн тэгшитгэл болж байна : $t = t + 2t - 2$ буюу эндээс $t = 1$. Бид сүүлийнхээ зорилтод хүрч, энэ тохиолдолд бодлогоо бодож чадлаа.

Анх харахад хэцүү санагдаж байсан боловч үнэндээ илүү хялбар байжээ. Одоо эхний тохиолдол руугаа эргэн орцгооё.

Тохиолдол 1. $f(0) = 0$ байг.

Эхлээд өмнөх үр дүнгүүдээ жагсааж бичье, ингэснээр илүү эмх цэгцтэй сэтгэхэд туслана:

i) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$

ii) $f(x)$, $x + f(x)$, $x + f(x) - 1$ үл хөдлөх цэгүүд

iii) $(3')$ буюу $f(x) + f(-x^2) = x - xf(x)$

iv) (4) буюу $f(1 + f(y + 1)) + f(y) = 1 + f(y + 1) + y$

Нэгэнт өгсөн тэгшитгэлд орлуулга хийх хүндрэлтэй байгаа учраас өмнөх үр дүнгүүдээ харъя. Бид $(3')$ буюу $f(x) + f(-x^2) = x - xf(x)$ тэгшитгэлийг бараг ашиглаагүй юм байна. Энэ үр дүн бидэнд $f(x)$, $f(-x^2)$ гэсэн хамаагүй шахуу хоёр хэмжигдэхүүний хооронд хамаарал өгч байгаа нь тийм ч хэрэгтэй биш мэт боловч нэг онцлог шинж нь $f(-x^2)$ дотор x^2 оролцсон байна. Энэ нь x оронд $(-x)$ орлуулахад $f(-x^2)$ өөрчлөгдөхгүй гэсэн юм. Тэгэхээр онолын хувьд уг орлуулгаар $f(-x), f(-x^2)$ хоёрын хооронд хамаарал гарч ирэх бөгөөд хоёр тэгшитгэлээсээ $f(-x^2)$ зайлуулах замаар $f(x), f(-x)$ хооронд хамаарал гарч ирэх боломжтой. Сонирхолтой үр дүн гараад ирж магадгүй учраас үүнийг хийж үзье : $x \to -x$ гэдгээс $f(-x) + f(-x^2) = (-x) - (-x)f(-x)$ буюу

$$f(-x) + f(-x^2) = -x + xf(-x)$$

гэж гарна. ($3'$)-тай харьцуулаад $f(-x^2)$ ялгавал $f(-x^2) = x - (x+1)f(x) = -x + (x-1)f(-x)$ буюу

$$(x+1)f(x) + (x-1)f(-x) = 2x \tag{5}$$

боллоо. Тэгэхээр $f(x)$, $f(-x)$ нь хоорондоо ийм хамааралтай ажээ.

Тэгшитгэлд $f(x)$, $f(-x)$ холилдоод ороод ирэх бүрд функцын тэгш сондгойн чанар яригддаг билээ. Үнэхээр, манай шийд $f(x) = x$ сондгой функц юм. Бид (5)-с f сондгой функц гэж харуулж чадах уу? Уг тэгшитгэлээс $x \neq 1$ үед $f(-x) = \frac{2x-(x+1)f(x)}{x-1}$ гэж гарах тул эндээс шууд $f(-x) = -f(x)$ гэж гарахгүй нь илт. Шалгаж үзвэл $f(-x) = -f(x)$ байх нь $2x - (x+1)f(x) = -(x-1)f(x)$ буюу $f(x) = x$ биелэхтэй эквивалент гэж гарна. Ийнхүү (5) ашиглан анх батлахыг хүссэн $f(-x) = -f(x)$ нь гол зорилгоо батлахаас наашгүй болж байгаа нь бага зэрэг урам хугармаар юм. Гэвч сайн бодоод үзвэл, бид f сондгой $\Longleftrightarrow$ $f(x) = x$ гэдгийг анзаарч харлаа гэсэн үг шүү дээ! Учир нь $f(-x) = -f(x)$ бол үүнийг (5)−д орлуулвал $(x+1)f(x) - (x-1)f(x) = 2x$ буюу $f(x) = x$ болж байна. Тэгэхээр f сондгой гэдгийг баталвал манай бодлого бодогдоно. Бид $f(0) = 0$ тохиолдол дээрх тактикийн зорилгоо анх удаа биелүүлж, $f(x) = x$-ийг илүү хялбар зорилгоор сольж чадлаа.

Одоо бид хэрхэн $f(-x) = -f(x)$ гэж батлах талаараа бодож үзэцгээе. Өмнө нь $f(-x)$ оролцсон тэгшитгэл, үр дүн гаргаж байгаагүй учраас өгсөн тэгшитгэлээсээ хэрэг болох мэдээлэл гаргах гэж оролдож үзье. Уг тэгшитгэл дотор хэрхэн $f(-x), f(x)$ оролцсон юм үүсгэх вэ? Хэсэг туршиж үзсэний дараа тэгшитгэлийн хоёр талд байгаа $f(xy), yf(x)$ нүдэнд өртөнө. Бид $y = -1$ гэж орлуулан нэг талд $f(-x)$, нөгөө талд $-f(x)$ гаргаж чадах юм байна шүү дээ. Үүнийг туршаад үзье : $y = -1$ гэвэл

$$f(x+f(x-1))+f(-x)=x+f(x-1)-f(x)$$

болно. Тэгэхээр $f(-x)=-f(x)$ гэж батлахын тулд $f(x+f(x-1))=x+f(x-1)$ буюу $x+f(x-1)$ үл хөдлөх цэг гэж харуулахад хангалттай ажээ (сайн анзаарвал бид өмнөх ($\star$) санааг дахин ашигласан байна). Дахиад, $(x-1)$-ийг x гэж авбал энэ нь дурын x бодитын хувьд $x+f(x)+1$ үл хөдлөх цэг байхтай эквивалент гэсэн үг юм. Гэхдээ $x+f(x)+1$ нь анх харахад их төвөгтэй мэт санагдана. Энэ яг зөв зам мөн үү? Ийнхүү бид одоо хоёр сонголтоос нэгийг сонгох ёстой боллоо : $f(-x)=-f(x)$ зорилтоо "$x+f(x)+1$ үл хөдлөх цэг гэж батал" гэдэг шинэ зорилтоор солих эсвэл батлах өөр арга хайх. Сайн бодоод үзвэл, шинэ зорилт маань харин ч бидэнд хүрэхэд илүү ойрхон байж болох юм, учир нь

i) Бид үл хөдлөх цэгүүдийг сайн судалсан

ii) Үүнтэй төстэй $x+f(x)$ болон $x+f(x)-1$ үл хөдлөх цэгүүд болохыг баталсан

Үл хөдлөх цэгүүд яагаад ч юм 1 зайтай тоонууд үүсгээд байна. Гэхдээ яагаад? Бидэнд юу 1 зайтай цэгүүдийн талаар сайн үр дүн өгч чадах вэ? гээд бодоод үзье. Ямар ч байсан бидний зорилго болох

$x+f(x)$, $x+f(x)-1$ үл хөдлөх цэг гэдгийг ашиглан $x+f(x)+1$ үл хөдлөх цэг гэдгийг батал

нь гурван дэс дараалсан y, $y+1$, $y+2$-н үл хөдлөх цэг байх эсэхтэй холбоотой онцгой чанар, зүй тогтол олж нээхийг шаардаж байна. Бид өмнө гаргасан баахан үр дүнгүүдээсээ хэрэг болох юм байна уу? гээд хайгаад үзвэл (4) их онцгойрно :

$$f(1+f(y+1))+f(y)=1+f(y+1)+y \tag{4}$$

Үүний чухал шинж чанар нь $1+f(y+1)$ нь $(y+2)$-тэй тэнцүү гэдгийг бид мэдэж байгаа. Өөрөөр хэлбэл, (4) нь "бараг"л

$$f(y+2)+f(y)=(y+2)+y \tag{4'}$$

гэж хэлж байна гэсэн үг, дээрх тэгшитгэл бидэнд $y+2$ ба y-ийг холбох боломж олгож байна шүү дээ. Хэрэв $f(y+2)+f(y)=(y+2)+y$ үнэн бол мэдээж $y+2$ үл хөдлөх цэг байх нь y үл хөдлөх цэг байхтай эквивалент.

Одоо энэ санаагаа бодит байдал болгох гэж оролдъё. Эхлээд (4)-с $(4')$-ийг гаргах хэрэгтэй, үүний тулд $f(y+1)=y+1$ байх хэрэгтэй. Өөрөөр хэлбэл, $y+1$ үл хөдлөх цэг байх ёстой гэсэн үг юм. За, $y+1$ үл хөдлөх цэг байлаа гэж үзье. Тэгвэл $(4')$ үнэн болох бөгөөд эндээс

$$y \text{ үл хөдлөх цэг} \Longleftrightarrow y+2 \text{ үл хөдлөх цэг}$$

гэж гарч байна. Ингээд бодолтоо хэрхэн гүйцээх нь тодорхой боллоо : бид y, $y+1$ үл хөдлөх гэдгээс $y+2$ үл хөдлөх цэг гэж гаргахыг зорьж буй тул $y=x+f(x)-1$ гэж орлуулвал (4)-с

$$f(1+f(x+f(x)))+f(x+f(x)-1)=1+f(x+f(x))+x+f(x)-1$$

буюу

$$f(x+f(x)+1)+x+f(x)-1=1+x+f(x)+x+f(x)-1$$

гэдгээс

$$f(x + f(x) + 1) = x + f(x) + 1$$

болох юм.

Ийнхүү эцэст нь бодлого бодогдлоо. Дээрх бодолт маш олон алхам, туршилт хийгдэж уйгагүй ажилласны эцэст бий болсон бөгөөд олон техник хэрэглэгдэж байна. Ийм бодлогууд олон оролдлого, жижиг санаануудыг оньсоор барилга бариж буй мэт нарийн зохион байгуулалттайгаар эвлүүлснээр л бодогдох боломжтой болдог. Ийм бодлогын бүх алхамыг олимпиадын үеэр олж харахын тулд хамгийн чухал нь туршлагатай байх хэрэгтэй, бас уйгагүй "trial-and-error"хийж бодлоготойгоо ажиллах хэрэгтэй юм.